1 العلاقات

نطرح في هذا الفصل مفاهيم أساسيّة شوهد معظمها من قبل في الأطوار التعليميّة السابقة. إنّها مفاهيم بالغة الأهمّية لايكاد يخلو منها بطن من بطون الرياضيّات على الإطلاق . نستعرضها في قسمين . يتناول الأوّل العلاقات بين مجموعتين مختلفتين عموما؛ نبرز فيه ، على وجه الخصوص ، الميزات الكبرى لنمط منها يتمثّل في التطبيقات . أمّا الثاني ، فهو مخصّص لسرد التعاريف والخاصيّات المتعلقة بالعلاقات المعرّفة في مجموعة واحدة ؛ نتصدّى بدراسة مستفيضة لنمطين منها وهما : علاقات التكافؤ وعلاقات الترتيب .

وقبل الشروع في ذلك ، يكون حريًا بنا أن نحثّ الطالب لا على التمعّن والتدبّر في هذه المفاهيم وفهمها وحفظها علي ظاهر قلب فحسب ، بل ينبغي أن يرقى فهمه إلى التمكّن من التطبيقات العمليّة والإتيان بأمثلة وأمثلة مضادّة .

لنستحضر في البداية القسم الأوّل ولنفتتحه بهذه الـ :

1.1 عموميّات

1.1.1 امثلة

١ـ لتكن المجموعتان :

H = { الأمين ، عمر ، عبد الغفّار ، عيسى ، السادات ، صخر} .

F = { زبيدة ، حفصة ، مريم ، جيهان ، أسماء ، الخنساء} .

نقوم بربط عنصر x من H بعنصر y من F وذلك باختلاق رابطات ما ، كأن نضع :

الأمين إبن زبيدة ونرمز للرابطة " x إبن y " بـ $x\mathcal{R}_1y$.

عمر أبو حفصة ونرمز للرابطة " x أبو y " بـ $x\mathcal{R}_2y$.

مريم أمّ عيسى ونرمز للرابطة " x أمّ y " بـ $x\mathcal{R}_3y$.

٢ـ لتكن H مجموعة الرجال وF مجموعة النساء .

إذا رمزنا بـ x لعنصر من H وy لآخر من F أمكننا أن نضع :

$x\mathcal{R}_1y \Leftrightarrow$ y أخت x ؛ $x\mathcal{R}_2y \Leftrightarrow$ y أمّ x ؛ $x\mathcal{R}_3y \Leftrightarrow$ y زوجة x .

هذه ثلاث رابطات بين H وF . إنّ غيرها كثير.

٣ـ نعتبر حاليا المجموعتين :

C = {الرياض ، صنعاء ، الخرطوم ، القاهرة ، بيروت ، الرباط ، بغداد} .

P = {مصر، لبنان ، المغرب ، العراق ، سوريا ، اليمن ، الهند} .

نوصل المجموعة C بالمجموعة P بواسطة الموصل $\mathcal{R}$ المعرّف على هذا النحو :

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$ x عاصمة y

إنّ فرز الأزواج (x,y) المعنية بالرابطة $\mathcal{R}$ في الجداء الديكارتي[1] CxP يعيّن $\mathcal{R}$ تماما لدينا بكّل وضوح :

(القاهرة ، مصر) ، (بيروت ، لبنان) ، (بغداد ، العراق) ، (صنعاء ، اليمن) .

تجدر الإشارة في هذا المضمار إلى أنّ :

١ـ هذه الأزواج مرتّبة ؛ ٢ـ هناك عناصر (x,y) من CxP لا تعنيها $\mathcal{R}$ ؛

٣ـ مجموعة الأزواج المذكورة أعلاه تسمّى بيان $\mathcal{R}$.

نخرج من هذه الأمثلة بأنّ تقديم " علاقة ثنائية " بين مجموعتين E وF يعود إلى الإتيان بثنائيّات (x,y) مشكّلة من عناصر x من E وأخرى y من F . وبعبارة أخرى

1ـ نسبة إلى الفيلسوف والرياضي الفرنسي (RENE DESCARTE: 1650 - 1596) . يعتبر بحقّ مؤسّسا للهندسة التحليلية ، التي تسمّى أحيانا بالهندسة الديكارتية تخليدا لإسمه .

تكون علاقة $\mathcal{R}$ معرّفة بين E و F إذا عُرف جزء G من الجداء الديكارتي $E\times F$ يتكوّن من الأزواج (x,y) التي تحقّق $\mathcal{R}$. لنضع إذن هذا الـ :

2.1.1 تعريف

لتكن E و F مجموعتين غير خاليتين . نسمّي *علاقة ثنائية* $\mathcal{R}$ بين E و F كلّ مجموعة جزئيّة من الجداء الديكارتي $E\times F$.

تسمّى E *منطلق* (أو *منبع* أو *مجموعة بدء*) العلاقة $\mathcal{R}$ و F *مستقر* (أو *هدف* أو *مجموعة وصول*) $\mathcal{R}$. ونسمّي *بيان* $\mathcal{R}$ المجموعة G الجزئيّة من $E\times F$ ، المعرّفة بـ :

$$G = \left\{(x,y)\in E\times F/\ x\mathcal{R}y\right\}.$$

هكذا ، نرى في الخلاصة أنّ تعريف $\mathcal{R}$ يتمثّل في إعطاء الثلاثي (E, F, G) المؤلّف من منطلق E ومستقرّ F وبيان G .

3.1.1 تمثيل علاقة ثنائيّة

لتعريف علاقة ما $\mathcal{R}$ كثيرا ما يلجأ إلى تمثيلها وفق طرق نذكر منها :

ا- طريقة الجدول

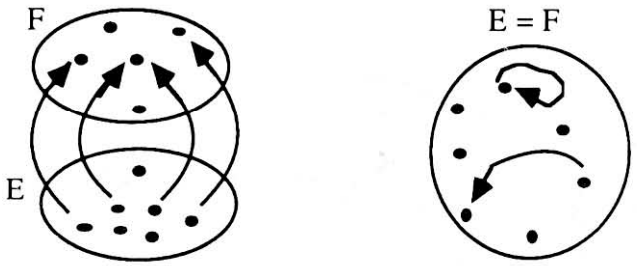
إذا كان بالإمكان وضع قائمة بجميع عناصر E وكذا كافّة عناصر F أضحى ممكنا عندئذ تشكيل جدول مزدوج المدخل تتعيّن به $\mathcal{R}$. في الجدول الموالي ، تشير الخانات

E \ F	كاهنة	حمزة	أسماء	سلمى
فجر الإسلام	•		•	
اللهب المقدس		•		•
الحساب التفاضلي	•	•	•	•
دروس في الجبر	•	•		•
النحو الواضح			•	
دعاء الكروان				
ماجدولين	•	•		•

التي تحمل الإشارة (•) إلى عنصر مجموعة الطلبة E الذين طالعوا كتابا من المجموعة F .

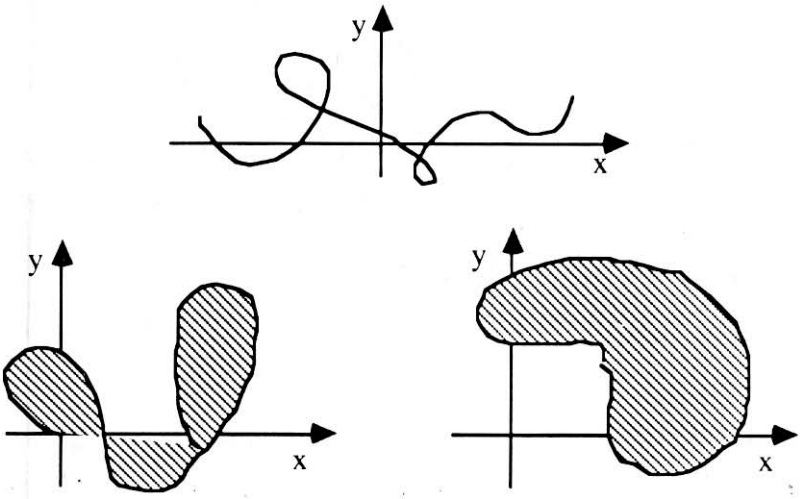
٢ ـ المخطط السهمي

في هذا التمثيل ، يعمد إلى الإتيان بعناصر المجموعتين E وF علي شكل نقاط ثمّ توصل العناصر x و y التي تحقّق $x\mathcal{R}y$ بسهم ؛ كما هو مبيّن في هذين الرسمين :



٣ ـ المخطط البياني (الديكارتي)

إذا كانت E وF مجموعتين عدديّتين ، كان بالإمكان تمثيل علاقة ما $\mathcal{R}$ بين E و F بمنحنى أو *ميدان* من المستوي . هذه حالات منها :



4.1.1 تعريف

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية منطلقها E ومستقرّها F وبيانها G .

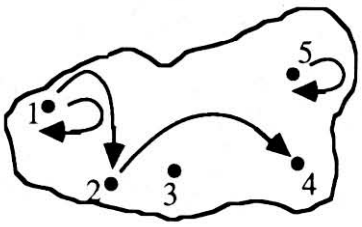
نسمّى *العلاقة العكسيّة* لـ $\mathcal{R}$ العلاقة الثنائية المرموز لها بـ $\mathcal{R}^{-1}$ والمعرّفة بـ :

$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad y\,\mathcal{R}^{-1}x$$

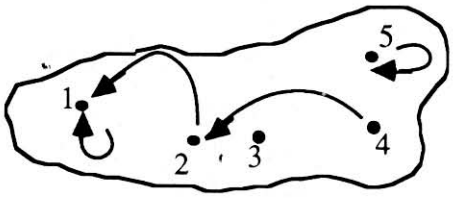
وبطبيعة الحال ، يظهر بكلّ وضوح من هذا التعريف أنّ العلاقة العكسيّة لـ $\mathcal{R}^{-1}$ هي $\mathcal{R}$ ذاتها .

5.1.1 امثلة

١ـ إذا كانت $\mathcal{R}$ ممثّلة كما في هذا الرسم



مع بيانها $G = \{(1,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,4)\ ,\ (5,5)\}$ فإنّ $\mathcal{R}^{-1}$ تكون ممثّلة هكذا :



ويكون بيانها المرموز له بـ G^{-1} مساويا $G^{-1} = \{(1,1),\ (2,1),\ (4,2),\ (5,5)\}$.

٢ـ لنأخذ $E = F = \mathbb{R}$ = مجموعة الأعداد الحقيقيّة ولنضع :

$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad y = x+1.$$

يكون لدينا عندئذ :

$$x\,\mathcal{R}^{-1}y \quad \Leftrightarrow \quad x = y-1.$$

٣ـ نعرّف في $E = F = \mathbb{N}$ (مجموعة الأعداد الطبيعيّة) العلاقة $\mathcal{R}$ التاليّة :

$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad y \text{ يقسم } x$$

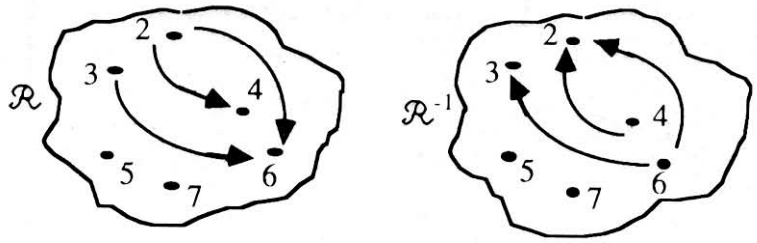
أي :

$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, q \in \mathbb{N} \;/\; y = qx$$

وعليه :

$$x\,\mathcal{R}^{-1}y \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ مضاعف لـ } y$$

إذا خصّصنا في هذه الحالة ، $E = F = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ، حصلنا على التمثيلين :

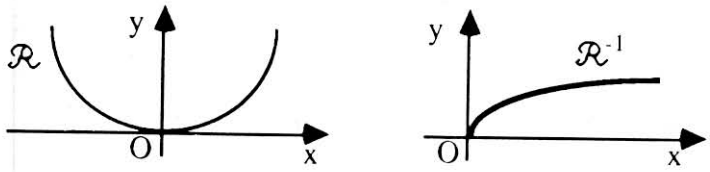


٤ ـ $\mathcal{R}$ علاقة تتمتّع بـ $\mathbb{R}$ منطلقا ومستقرا لها ، وهي على هذا النحو :

$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2 .$$

يكون لدينا توا :

$$x\mathcal{R}^{-1}y \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{y} .$$



بعد هذه الجولة التمهيدية ، نقوم حاليا بتمييز نمطين جوهريّين هامّين من بين العلاقات الثنائية ، يشكّلان ، في الواقع ، الغرض المستهدف في الجزء الأوّل من فصلنا هذا ، ونعني *التوابع والتطبيقات* .

2.1 التوابع

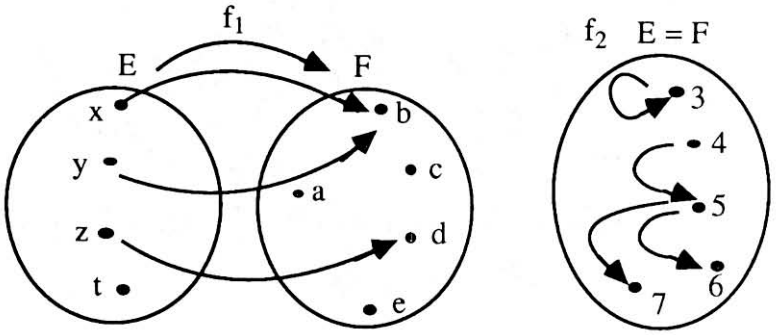
1.2.1 تعريف

لتكن E وF مجموعتين غير خاليّتين . نسمّي تابعا منطلقه E ومستقرّه F كلّ علاقة ثنائية f من E نحوF مرموز لها بـ $f : E \to F$ ، تلحق بكلّ عنصرx من E عنصرا y من F على الأكثر . نكتب عادة $f(x) = y$.

يسمّى y صورة x وفق f بينما يدعى x *سابقة* y إزاء f .

2.2.1 امثلة

١ـ لنتوهّم العلاقتين الثنائيتين الممثّلتين سهميًا هكذا :



نجد أنّ العلاقة الأولى f_1 تابع في حين أنّ الثانية f_2 ليست كذلك ، إذ أنّ العنصر 5 يتمتّع بأكثر من صورة .

٢ـ نعتبر العلاقتين :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad ; \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = x^2 \qquad\qquad x \to g(x) = \frac{e^x+1}{x-1}$$

إنّ f وg تابعان .

٣ـ العلاقة الثنائية $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّفة بـ :

$$x \to f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

تشكّل تابعا يدعى *تابع ديركليت*[1] .

٤ـ نسمّي التابع المطابق على مجموعة E ، التابع المرموز له بـ id_E والمنطلق من E نحو E بحيث $id_E(x) = x$ ، أيّا كان x من E ؛ أي أنّ كلّ عنصر يتمتّع بذاته صورة له . إنّ هذا التابع كبيرة أهمّيته وكثيرة ومتنوّعة تطبيقاته ؛ ألا فاهضمه واحفظه !

٥ـ ليكن A جزءا غير خال من E . التابع $i : A \to E$ المعرّف بـ $i(x) = x$ يدعى *التباين القانوني* .

نرمز عادة لجماعة التوابع المنطلقة من E نحو F بـ $\mathcal{F}(E,F)$. إذا كانت E و F مجموعتين عدديتين قيل عن عنصر من $\mathcal{F}(E,F)$ إنّه *تابع عدديّ* . وبالخصوص ، إذا كانت $F = \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) قيل عن f إنّه *تابع حقيقيّ* (عقدي) . أمّا إذا كانت E و F مشكّلتين من نقاط المستوي قيل عن عنصر $f : E \to F$ إنّه *تحويل نقطي* .

3.2.1 تعريف

ليكن f عنصرا من $\mathcal{F}(E,F)$. نسمّي *ميدان تعريف* f المجموعة الجزئيّة D من E التي يتمتّع كلّ عنصر x منها بصورة $f(x) = y$ في F . ونكتب :

$$D = \left\{ x \in E \ / \ \exists \ y \in F, \ y = f(x) \right\}.$$

هكذا ، نجد مثلا أنّ التابع الحقيقي $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بـ $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$ يقبل المجموعة $D = \mathbb{R} - \{0,1\}$ ميدانا تعريفيّا له .

ونقول عن عنصرين f و g من $\mathcal{F}(E,F)$ إنّهما *متساويان* إذا تطابق ميدانا

---

1 - (PETER GUSTAVE LEJEUNE, DIRICHLET: 1805-1859) ؛ هو عالم رياضي ألماني في نظرية الأعداد والتحليل الرياضي والرياضيات التطبيقية .

تعريفهما وحقّقا في هذا الميدان المشترك D :

$$\forall\ x \in D\ \ f(x) = g(x).$$

4.2.1 تعريف

ليكن f عنصرا من $\mathcal{F}(E,F)$ و A جزءا غير خال من E . إنّ التابع g المنطلق من A نحو F والمعرّف بالكيفية الموالية :

من أجل x من A :

يكون $g(x)$ مطابقا $f(x)$ إن كان هذا الأخير موجودا (أو معرّفا) ؛

ويكون $g(x)$ غير موجود إن كان $f(x)$ غير موجود ؛

يسمّى مقصور f على A . ويقال أيضا ، في هذه الحالة ، إنّ f تمديد لـ g إلى E (أو إنّ f يمدّد g إلى E) .

يأتي بجلاء ، في هذا الإطار ، أنّ التباين القانوني يمثّل مقصور التابع المطابق على A أو ، والأمر سيّان ، أنّ التابع المطابق يؤلّف تمديدا للتباين القانوني إلى E . وأخيرا يكون من السهولة استنباط كون كلّ تابع تمديدا لكلّ واحد من مقصوراته .

5.2.1 تعريف

ليكن f عنصرا من $\mathcal{F}(E,F)$ و A و B جزأين من E و F على الترتيب . نسمّي صورة A وفق f المجموعة الجزئية المرموز لها بـ $f(A)$ من F والمؤلّفة من كافّة العناصر $f(x) = y$ التي لها سابقة x من A . ونكتب $f(A) = \{y = f(x) \in F,\ x \in A\}$.

ويقال أحيانا إنّ $f(A)$ هي *الصورة المباشرة* لـ A وفق f .

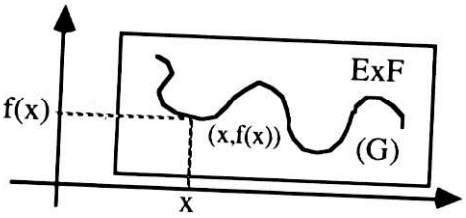
يكون لدينا على التو في الحالتين :

أ ـ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ؛ ب ـ $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$n \to f(n) = 2n$ ؛ $x \to g(x) = x^2$

$f(\mathbb{N})$ هي مجموعة الأعداد الطبيعيّة الزوجية و $g([-1,1]) = [0,1]$.

وفي الأخير ، نسمّي بيان f الجزء G من ExF المؤلف من الأزواج $(x,f(x))$ حيث x يمسح ميدان تعريف f في E . ونضع $G = \{(x,y)\in E\times F/\ y = f(x)\}$.



6.2.1 قضية

إذا كان f عنصرا من $\mathscr{F}(E,F)$ وكان A وB جزأين من E كان لدينا عندئذ :

١- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

٢- $f(A\cup B) = f(A) \cup f(B)$.

٣- $f(A\cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

إثبات

١- لدينا :

$$y\in f(A) \Rightarrow \exists\, x\in A\ /\ f(x) = y$$

ولكن $x\in B$ إذن $y = f(x)\in f(B)$ ، ومنه $f(A) \subset f(B)$.

٢- بالإستناد إلى البند (١) يأتي على الفور :

$$A \subset A\cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A\cup B)$$
$$B \subset A\cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A\cup B)$$

وعليه :

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A\cup B)\ . \qquad (*)$$

وبالعكس ، لدينا :

$$y\in f(A\cup B) \Rightarrow \exists\, x\in A\cup B/\ f(x) = y \Rightarrow y\in f(A) \vee y\in f(B)$$

وعليه :

$$y \in f(A \cup B) \Rightarrow y \in (f(A) \cup f(B))$$

أي :

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B). \qquad (**)$$

النتيجتان (*) و(**) تضمنان المساواة الموضوعة .

٣ـ كما سبق ، يكون لدينا :

$$A \cap B \subset A \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A),$$
$$A \cap B \subset B \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(B).$$

وعليه :

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$

وهو ما ينهي برهان القضيّة .

لنتوقّف برهة لنشير إلى أنّ الفرع (٣) من هذه القضيّة ينطوي على احتواء تام عموما ، كما يبرز ذلك المثال الآتي :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^2 .$$

فإن نحن اخترنا $A = [0,1]$ و $B = [-1,0]$ وجدنا عندئذ :

$$f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\} \text{ و } f(A) = f(B) = [0,1]$$

مما يفضي إلى أنّ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ مع $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

7.2.1 ملحوظة

ليس صعبا أن نرى أنّه بالإمكان القيام بتعميم وتوسيع الدعاوى (٢) و(٣) من القضيّة أعلاه إلى عدد منته من الأجزاء $(A_i)_{1 \le i \le n}$ ، فنحصل على :

$$f\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} f(A_i) \quad ; \quad f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i)$$

8.2.1 تعريف

ليكن f عنصرا من $\mathcal{F}(E,F)$ و B جزءا غير خال من F .

إنّ *الصورة العكسيّة* لـB وفق f هي المجموعة الجزئيّة المرموز لها بـ $f^{-1}(B)$ من E والمؤلّفة من العناصر x التي تنتمي صورتها إلى B . ونكتب :

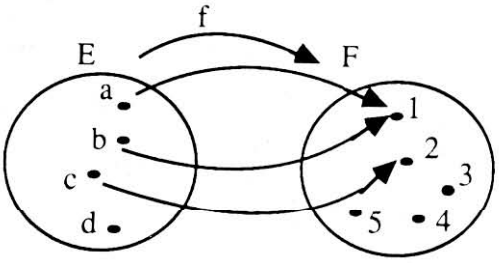
$$f^{-1}(B) = \left\{x \in E \,/\, f(x) \in B\right\}.$$

لنختر ، على سبيل المثال ، التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $x^2+1 = f(x)$ و $B = \{-1,0,,2,5\}$. يأتي بكلّ وضوح أنّ $f^{-1}(B) = \{-1,1,-2,2\}$ ؛ كما أنّ :

$$f^{-1}\left(\{-1,0\}\right) = \phi.$$

إنّ هذه النتيجة جديرة بالملاحظة ، إذ تظهر إمكان خلوّ صورة عكسيّة لمجموعة غير خالية . وبصفة عامّة ، تكون هذه الظاهرة واردة كلّما أُخذت B في F-f(E) . إنّ المثال الموالي يجسّد ذلك .

ليكن f التابع المعرّف بواسطة هذا المخطّط :



إذا اخترنا $B = \{3,4,5\}$ وجدنا $B \neq \phi$ و $f^{-1}(B) = \phi$.

في الأخير ، نحصل بسهولة على النتيجتين الواضحتين التاليتين :

أ ـ $f^{-1}(\phi) = \phi$

ب ـ إذا كان B جزءا مبسّطا إلى مجموعة أحادية $\{b\}$ أمكن وقتئذ التكلّم عن $f^{-1}(\{b\})$ ، ولكن بصفتها جزءا وليس قيمة ، ونكتب كالمعتاد :

$$f^{-1}(\{b\}) = \{x \in E \,/\, f(x) = b\}.$$

فإذا عدنا إلى المثال الأوّل أعلاه وجدنا $\phi = f^{-1}(\{0\})$ و $\{-4,4\} = f^{-1}(\{17\})$.

هكذا ، فإنّ المجموعة $f^{-1}(\{b\})$ قد تكون خالية ، أو أحادية أو مؤلّفة من عناصر عدّة (قد يكون عددها غير منته) .

9.2.1 تنبيه

إنّ الرمز $f^{-1}(\{b\})$ " متّصل " لا يحتمل الفصل . إنّه كائن رياضي موحّد يفقد معناه إن انسلخ f^{-1} عن B . فمن فرّق بينهما منكم ، والحال هذه ، يكون قد اقترف خطأ ما بعده خطأ . سوف نهيّء ظروفا يزول فيها هذا الحظر ، ألا فاصبر !

نجمل في القضيّة الموالية بعضا من الخصائص الأولية لمفهوم الصورة العكسية ، فإليكموها :

10.2.1 قضية

ليكن f عنصرا من $\mathcal{F}(E,F)$ و A جزءا من E و B و C جزأين من F .

يكون لدينا عندئذ :

١. $B \subset C \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C).$

٢. $f^{-1}(A \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C).$

٣. $f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C).$

٤. $f^{-1}(C_F B) = C_E\, f^{-1}(B).$

٥. $A \subset f^{-1}(f(A)).$

٦. $f(f^{-1}(B)) \subset B.$

إثبات

إمتحان صحّة هذه الدعاوى ليس عسيرا ، لا يتطلّب سوى استخدام مباشر للتعريف (8.2.1) . وللقارئ الذي يبغي معالجتها أن يقتفي أثرنا في النهج الذي سلكناه في

القضيّة (10.1.1) . ومع ذلك ، نسير مع القارئ ، ولو بشئ من الإقتضاب ، في التصدّي للبنود الثلاثة الأخيرة . في البداية :

٤- $x\in f^{-1}(F-B) \Leftrightarrow f(x)\in F-B \Leftrightarrow f(x)\notin B$

$\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x\in E-f^{-1}(B).$

ومنه المساواة المنشودة .

٥- $x\in A \Rightarrow f(x)\in f(A) \Rightarrow x\in f^{-1}\big(f(A)\big)$

أي $A\subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.

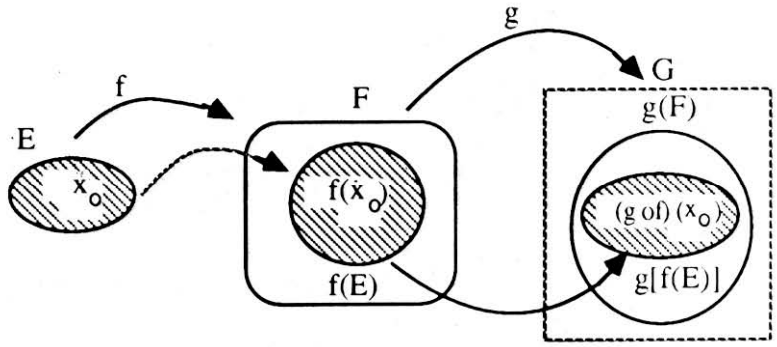
٦- وبالمثل :

$y\in f\big(f^{-1}(B)\big) \Rightarrow \exists\, x\in f^{-1}(B) \,/\, y=f(x) \Rightarrow y\in B.$

إذن $f\big(f^{-1}(B)\big)\subset B$.

11.2.1 تعريف

لتكن E و F و G ثلاث مجموعات غير خالية . وليكن f تابعا من $\mathcal{F}(E,F)$ ميدان تعريفه D و g تابعا من $\mathcal{F}(F,G)$ ميدان تعريفه D' . إنّ العلاقة $h: E\to G$ التي تزوج x بـ $g[f(x)]$ تعرّف تابعا h منطلقه E ومستقرّه G ؛ يتشكّل ميدان تعريفه من العناصر x من D التي تنتمي صورها $f(x)$ إلى D' . يدعى



التابع h *بالتابع المركّب* من f و g ويرمز له بـ gof .

12.2.1 امثلة

١ـ ليكن التابعان $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ بحيث $f(n) = 2n+1$ و $g(n) = n^3$.

يأتي أنّ :

$$(gof)(n) = g[f(n)] = g(2n+1) = (n+1)^3$$

و

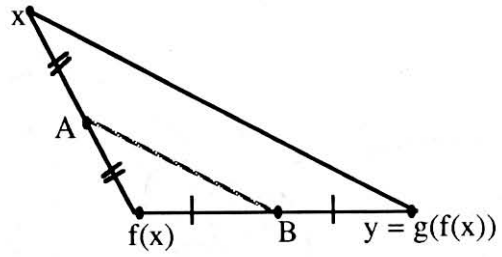
$$(fog)(n) = f[g(n)] = f(n^3) = 2n^3+1 .$$

٢ـ باستخدام التابعين $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x^2+1$.

نجد :

$$(gof)(x) = g[f(x)] = g(\sin x) = \sin^2 x+1$$
$$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x^2+1) = \sin (x^2+1) .$$

٣ـ لتكن E مجموعة نقاط المستوي ولنتوهّم أنّ $G = F = E$. نرمز بـ f للتناظر بالنسبة إلى نقطة A وبـ g للتناظر بالنسبة إلى نقطة B . لنضع $g[f(x)] = y$. يأتي أنّ $\overrightarrow{xy} = 2\,\overrightarrow{AB}$. نستخلص أنّه يُتحصّل على y بالإنسحاب وفق الشعاع $2\,\overrightarrow{AB}$



وهو ما يفيد أنّ gof هو الإنسحاب ذو الشعاع $2\,\overrightarrow{AB}$.

وبالمثل ، فإنّ التابع المركّب fog هو الإنسحاب ذو الشعاع $2\,\overrightarrow{BA}$.

13.2.1 ملحوظتان

١- إنّ قانون التركيب في $\mathcal{F}(E,F)$ *ليس تبديليًا* كما يتجلّى ذلك عبر الأمثلة السابقة .

٢- وبالعكس ، فإنّ قانون التركيب تجميعي . وبالفعل ، لنتصوّر أربع مجموعات E، F وG وH وثلاثة توابع $f : E \to F$ و $g : F \to G$ و $h : G \to H$. يأتي أنّ التابع $h\circ g$ يتمتّع بالمجموعتين F وG منطلقا ومستقرًا له وهو ما يجعل التابع $(h\circ g)\circ f$ ينطلق من E ويصل إلى H . إنّه حال التابع $h\circ(g\circ f)$. فإذا قمنا بمقارنة هذين التابعين جاء توًا :

$$\left[(h\circ g)\circ f\right](x) = (h\circ g)\,(f(x)) = h\left[g(f(x))\right]$$
$$\left[h\circ(g\circ f)\right](x) = h\left[(g\circ f)\,(x)\right] = h\left[g(f(x))\right]$$

وهذا ، لما يكون للقيم $f(x)$ و$g(f(x))$ و $h[g(f(x))]$ وجود ؛ ذلك لأنّه في حالة العكس لن يكون أيّ واحد من التابعين معرّفا . إنّ هذين التابعين المتمتّعين بميدان تعريف واحد واللذين يحولان كلّ عنصر من هذا الميدان المشترك إلى نقطة واحدة من H متطابقان ، ونكتب :

$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f) = h\circ g\circ f\ .$$

نصل الآن إلى النمط الثاني من العلاقات الثنائية المتمثّل في التطبيقات .

3.1 التطبيقات

1.3.1 تعريف

نسمّي تطبيقا منطلقه E ومستقرّه F كلّ قانون مرموز له بـ $f : E \to F$ يلحق بكلّ عنصر x من E *عنصرا وحيدا* $f(x) = y$ من F .

إذا استحضرنا التعريف (1.1.1) ظهر جليًا أنّ *كلّ تطبيق تابع* بيد أنّ العكس

ليس صحيحا عموما . نتحجّج بهذه الملاحظة للجزم بأنّ كلّ ما سبق آنفا من خصائص ومميّزات يظلّ مقبولا ها هنا .

2.3.1 امثلة

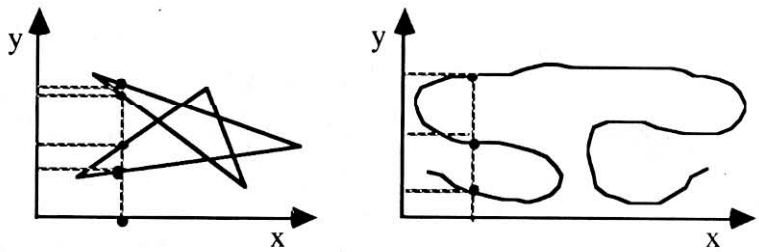
١ـ نعتبر ثلاثة توابع f_1 و f_2 و f_3 بحيث :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad ; \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f_1(x) = 0 \qquad x \to f_2(x) = x^2$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f_3(x) = \sqrt{x}$$

من السهل أن نرى أنّ ثالث التوابع الثلاثة لا يشكّل تطبيقا إذ توجد عناصر من مجموعة البدء (كلّ الأعداد السالبة) لا تقبل صورا وفقه . وبالطبع ، فالإثنان الأوّلان تطبيقان .

٢ـ هاتان العلاقتان الممثّلتان بيانيّا ليستا تطبيقين ، بل ليستا تابعين أيضا . أذكر لماذا .



٣ـ التابع القانوني والتابع المطابق الوارد ذكرهما آنفا تطبيقان .

٤ـ عد إلى طائفة الأمثلة (7.1.1) وميّز من بين العلاقات المعروضة فيها تلك التي تمثّل تطبيقات .

نختم هذه العموميّات بالتمييز الموالي :

3.3.1 تعريف

نقول عن تابع $f : E \to F$ إنّه تطبيق إن حقّق :

$$\forall\, x,x' \in E \quad x = x' \;\Rightarrow\; f(x) = f(x').$$

فيما يلي ، نستعرض بعضا من الصفات الأساسيّة الهامّة التي يمكن لتطبيق ما التمتّع بها. في البداية نضع :

4.3.1 تعريف

نقول عن تطبيق $f : E \to F$ إنّه متباين إذا حقّق :

$$\forall\, x,x' \in E \quad x \neq x' \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(x'),$$

أو ، والأمر سيان :

$$\forall\, x,x' \in E \quad f(x) = f(x') \;\Rightarrow\; x = x'.$$

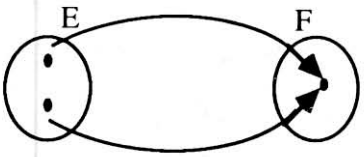
وبعبارة أخرى ، يكون تطبيق f متباينا إذا وفقط إذا كانت صورتا عنصرين مختلفين مختلفتين . وقد يؤتى بمفهوم التباين في الإطار الآخر التالي :

يكون f متباينا إن حقّق :

$$\forall\, y \in F \quad f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \phi \\ \text{أو} \\ \{a\} \end{cases}$$

حيث a عنصر ما من E .

5.3.1 امثلة



١ـ في الرسم المقابل نجد تطبيقا غير متباين

٢ـ التطبيق $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $g(x) = 2x+1$ متباين ذلك لأنّ :

$$g(x) = g(x') \;\Leftrightarrow\; 2x+1 = 2x'+1 \;\Leftrightarrow\; x = x'.$$

٣ـ التطبيق $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $x^2 = h(x)$ ليس متباينا . فلو أخذنا ـ مثلا ـ $x = 1$ و $x' = -1$ لوجدنا $h(-1) = h(1) = 1$ مع أنّ $x \neq x'$.

٤ـ التطبيقان المطابق والقانوني متباينان بداهة .

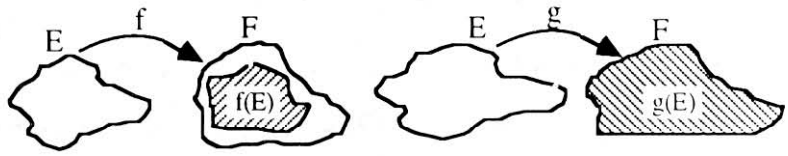
6.3.1 تعريف

نقول عن تطبيق $f : E \to F$ إنّه غامر إذا حقّق $f(E) = F$. وهو ما يفسّر بـ :

$$\forall\, y \in F \;\; \exists\, x \in E \;/\; f(x) = y .$$

7.3.1 امثلة

١ـ التطبيقان ذوا التمثيلين السهميّين أسفله أحدهما غامر والآخر ليس كذلك . ميّزهما .



ب ـ إذا رمز بـ P لمجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية كان التطبيق $f : P \to \mathbb{N}$

$$n \to \frac{n}{2}$$

غامرا . وفعلا ، من أجل كلّ m من $\mathbb{N}$ يوجد $n = 2m$ بحيث $m = f(n) = \frac{2m}{2}$.

جـ ـ التطبيقان $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ و $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث $g(n) = 2n$ و $h(x) = x^2$ ليسا غامرين . فبشأن الأوّل ، نرى أنّ عناصر كثيرة لا تقبل سابقات . إنّه حال كلّ عدد فرديّ . أمّا بشأن الثاني ، فنلاحظ أنّ الأعداد السالبة هي التي حرّمت الغمر على h .

د ـ التطبيق المطابق id_E غامر ؛ بيد أنّ التباين القانوني $i : A \subset E \to E$:

$$x \to i(x) = x$$

ليس كذلك إن كان $E \neq A$.

8.3.1 تعريف

نسمّي تطبيقا *تقابليا* كلّ تطبيق يكون متباينا وغامرا .

9.3.1 امثلة

أ ـ التطبيق المطابق id_E تقابلي .

ب ـ كلّ تابع حقيقي ثابت على $\mathbb{R}$ غامر وليس متباينا بكلّ وضوح .

جـ ـ التطبيق $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $f(x) = 3x-2$ تقابلي ؛ بينما التطبيق $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، بحيث $g(x) = x^2-1$ ، ليس كذلك . علّل !

10.3.1 قضية

ليكن f تطبيقا من E نحو F . إذا كان f متباينا فإنّ :

١ ـ $\forall\ A,B \subset E \quad f(A\cap B) = f(A) \cap f(B).$

٢ ـ $\forall\ A \subset E \quad A = f^{-1}\big(f(A)\big)\ .$

وإذا كان f غامرا فإنّ :

$$\forall\ B \subset F \quad f\big(f^{-1}(B)\big) = B.$$

إثبات

١ـ لدينا بطبيعة الحال : $f(A\cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

وذلك طبقا للبند (٥) من القضية (14.1.1) . لنفترض أنّ f متباين ولنثبت أنّ :

$$f(A) \cap f(B) \subset f(A\cap B).$$

لدينا :

$$\begin{aligned} y\in f(A)\cap f(B) \quad &\Rightarrow \quad y\in f(A) \vee y\in f(B) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \exists\ x\in A\ /\ y = f(x) \\ \exists\ x'\in B\ /\ y = f(x') \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x' \quad \Rightarrow \quad x\in A\cap B \\ &\Rightarrow \quad y = f(x)\in f(A\cap B) \end{aligned}$$

ومنه الإحتواء المنشود .

٢ـ هنا أيضا ، نذكّر بأنّه قد مرّ بنا في البندين (٥) و(٦) من القضية (14.1.1) ذاتها أنّ $A \subset f^{-1}(f(A))$ و $f(f^{-1}(B)) \subset B$. إذن ، علينا فقط أن نمتحن صحّة الإحتواءين العكسيّين :

$$f^{-1}(f(A)) \subset A \qquad (*)$$

$$B \subset f(f^{-1}(B)) \qquad (**)$$

علما بأنّ f متباين في الحالة الأولى وغامر في الحالة الثانية .

بخصوص (*) لدينا :

$$x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow \exists\, x' \in A \,/\, f(x') = f(x)$$
$$\Rightarrow x = x' \Rightarrow x \in A .$$

أمّا بشأن (**) فلدينا بالمثل :

$$y \in B \Rightarrow \exists\, x \in E/\ f(x) = y \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(B)).$$

11.3.1 تعريف (التطبيق العكسي)

من المشروع أن نتساءل حاليا عن الشرط (أو الشروط) التي تجعل من العلاقة العكسية لتطبيق ما تطبيقا. فإذا اعتبرنا تطبيقا f منطلقه E ومصبّه F جزمنا بأنّه علاقة ثنائية . إنّه يقبل علاقة عكسية f^{-1} . فلكي تكون هذه الأخيرة تطبيقا من F نحو E يلزم ويكفي أن يتوفّر ما يلي :

أ ـ مهما يكن y من F ، يوجد عنصر x في E بحيث $f^{-1}(y) = x$ ، أي $y = f(x)$.
من الواضح أنّ هذا الشرط يكافيء كون f *تطبيقا غامرا* .

ب ـ أيّا كان y من F ، يوجد ـ على الأكثر ـ عنصر x في E بحيث $f^{-1}(y) = x$ ، أي $y = f(x)$. بديهيّ كذلك أنّ تحقّق هذه الميزة يفيد أنّ f متباين ، ذلك لأنّ كون $x' \neq x$ لا يتلاءم مع $f(x') = f(x)$. وبالطبع ، إذا كان f متباينا أضحى هذا القيد صحيحا.

في الخلاصة نحصل على التمييز الهام التالي :

لكي تكون العلاقة العكسية f^{-1} *لتطبيق* f *من* E *نحو* F *تطبيقا من* F *نحو* E ، *يلزم ويكفي أن يكون* f *تقابليًا* . و بالخصوص نضع :

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

وبطبيعة الحال ، فإنّ f^{-1} يقبل بدوره f عكسا له . فهو أيضا تقابلي من F نحو E .

12.3.1 امثلة

١ـ التطبيق المطابق id_E على E يتمتّع بنفسه تطبيقا عكسيًا له .

يقال عن التطبيق id_E وأمثاله من التطبيقات التي تتّخذ من ذواتها عكوسا لها إنّها تطبيقات *تضامنيّة* .

٢ـ لنعيّن f^{-1} في حالة التطبيق التقابلي $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعطى بـ $f(x) = 2x+1$.

لدينا بمقتضى غمر f :

$$\forall\, y \in \mathbb{R} \quad \exists\, x \in \mathbb{R} \;/\; y = 2x+1.$$

وعليه ، $x = \frac{1}{2}(y-1)$. نستخلص أنّ f^{-1} يكون معرّفا من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بـ :

$$y \to x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y-1).$$

إذا لجأنا إلى الإجراء المألوف (لا غير) القاضي بجعل x سابقة وy صورة، كتبنا أخيرا

$$x \to y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1).$$

٣ـ إذا كانت $F = E$ هي مجموعة نقاط المستوي ، فإنّ التطبيق العكسي للتحاكي h ذي المركز O (مبدإ الاحداثيات) والنسبة k هو التحاكي h^{-1} ذو المركز عينه O والنسبة $\frac{1}{k}$ ؛ ذلك لأنّ : $h : E \to E$

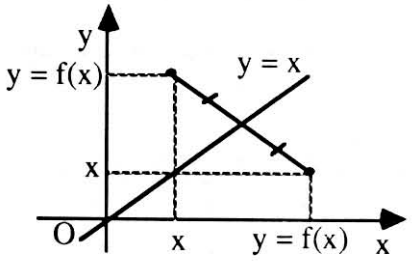
$$M \to h(M) = M'$$

مع $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$. وعليه ، يكون العكس $h^{-1}: E \to E$ معرفا بـ :

$M' \to h^{-1}(M') = M$ ، حيث $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$.

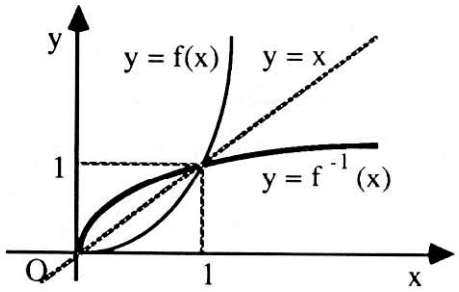
13.3.1 ملحوظتان

١ـ في الحالة التي يكون فيها f عدديا حقيقيًا *تقابليًا* ، يكون بيانا f و f^{-1} *متناظرين بالنسبة إلى منصّف المحورين الأوّل* . نرمز بـ $\Gamma_f = \{(x,f(x)) ; x \in \mathbb{R}\}$ و $\Gamma_{f^{-1}} = \{(f(x),x) ; x \in \mathbb{R}\}$ لهذين البيانين .

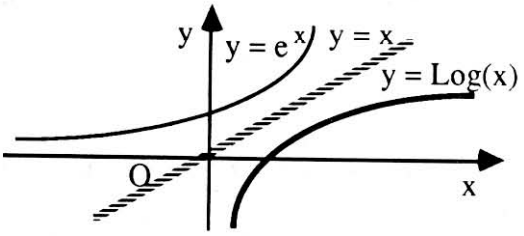


لنضرب لذلك هذين المثالين البسيطين :

أ ـ التطبيق $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ المعطى بـ $f(x) = x^2$ يقبل تطبيقا عكسيًا f^{-1} ينطلق (مثل f) من $\mathbb{R}_+$ نحو $\mathbb{R}_+$ بحيث $x \to f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ؛ ويكون تمثيلهما البياني في معلم واحد على النحو أسفله :



ب ـ التـابع الأسّي ذو الأسـاس e تقـابلي من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}_+^*$. إنّ مـعكوسـه $x \to \text{Log } x$ مشهور تحت تسمية *التابع اللوغاريتمي النيبيري*[3] ، وهو معرّف من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$. وكما سبق ، نأتي ببيانيهما كما أسفله :



٢ـ تجدر الإشارة في هذا الصدد إلى أنّ *الحظر* الذي فرضناه عليك إزاء عدم فصل f^{-1} عن B في الصورة العكسية $f^{-1}(B)$ يمكن رفعه الآن ؛ إذ أنّ الصورة العكسيّة $f^{-1}(B)$ تتطابق مع الصورة المباشرة لـ B وفق التطبيق f^{-1} الذي هو كائن رياضي مضمون الوجود (في حالة كون f تقابليا طبعا) .

14.3.1 مبرهنة

إذا كان $f : E \to F$ و $g : F \to E$ تطبيقين بحيث $g \circ f = id_E$ فإنّ f يكون متباينا و g غامرا .

إثبات

نستهلّ ذلك بتباين f . ليكن x و x' عنصرين من E بحيث $f(x) = f(x')$.يأتي عندئذ $g(f(x)) = g(f(x'))$. ومنه $id_E(x) = id_E(x')$ ؛ أي $x = x'$.

ومن جهة أخرى ، وبخصوص غمر g ، نرى أنّه إذا كان y عنصرا من E كتبنا بشأنه :

$$g(f(y)) = id_E(y) = y.$$

---

3 ـ نسبة إلى العالم الرياضي الإيكوسي جون نيبر (JOHN NEPER : 1550 - 1617) .

ينجرّ عن ذلك أنّ y صورة للعنصر $f(y)$ من F وفق g . إنّ هذا الأخير غامر إذن !

15.3.1 نتيجة

إذا كان $f : E \to F$ و $g : F \to E$ تطبيقين بحيث $gof = id_E$ و $fog = id_F$ فإنّ f و g يكونان عندئذ تقابليين . وبالخصوص ، يشكّل أحدهما معكوس الآخر ؛ أي أنّ $f = g^{-1}$ و $g = f^{-1}$.

إثبات

وبالفعل ، f و g متباينان وغامران طبقا للمبرهنة السابقة . إذن فهما تقابليّان .

وعلى صعيد آخر ، نكتب من أجل كلّ y من F :

$$f(g(y)) = y \quad \Leftrightarrow \quad g(y) = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad g = f^{-1}.$$

وبالمثل ، من أجل كلّ x من E يكون لدينا :

$$g(f(x)) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad f = g^{-1}$$

وهو ما ينهي نتيجتنا.

نذيّل هذا الجزء بنتيجة هامة أخرى مفادها :

16.3.1 نتيجة

إذا كان $f : E \to F$ تقابليّا غدا f^{-1} كذلك وحقّق $(f^{-1})^{-1} = f$.

إثبات

لدينا بكلّ وضوح $fof^{-1} = id_F$ و $f^{-1}of = id_E$. للختم يكفي استبدال g بـ f^{-1} في النتيجة السابقة . وبالخصوص ، لدينا $g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$.

نتأهّب حاليا للشروع في تقديم القسم الثاني المتمثّل في العلاقات المعرّفة على مجموعة واحدة . ستظلّ الأمور التي سقناها آنفا محتفظا بها كما سنرى .

نقوم بتجزئة هذا القسم بدوره إلى قسمين . إنّهما في هذا العنوان :

علاقات التكافؤ وعلاقات الترتيب

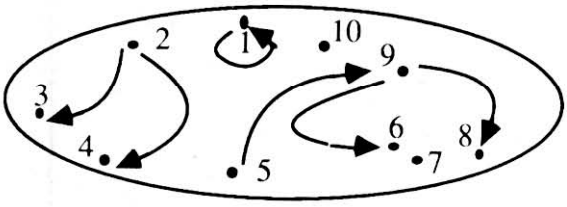
4.1 خصائص عامّة

1.4.1 تعريف

لتكن E مجموعة غير خالية . نسمّي علاقة ثنائية في E كلّ علاقة ثنائية يتطابق منطلقها ومستقرّها مع E .

2.4.1 امثلة

١ـ لتكن المجموعة $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. نعرّف في E علاقة $\mathcal{R}$ بواسطة تمثيلها السهمي :



وإذا أردنا معرفة بيانها G وضعنا :

$$G = \{(1,1)\ ,\ (2,3)\ ,\ (2,4)\ ,\ (5,9)\ ,\ (9,6)\ ,\ (9,8)\}$$

٢ـ لتكن E مجموعة مستقيمات المستوي . نعرّف علاقة $\mathcal{R}$ بوضع :

$$D\mathcal{R}D' \Leftrightarrow D\perp D'.$$

(و نقرأ : D عمودي على D' .)

٣ـ لتكن $E = \mathbb{N}$ و $\mathcal{R}$ علاقة معرّفة بـ :

$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow n = 2m+1.$$

3.4.1 تعريف

نسمّي علاقة إنعكاسيّة على مجموعة E كلّ علاقة $\mathcal{R}$ تحقّق :

$$\forall\ x\in E \quad x\mathcal{R}x.$$

إذا استعرضنا العلاقات الواردة أعلاه وجدناها كلها غير انعكاسية . فبالنسبة للأولى نلاحظ أنّ (4,4) ـ مثلا ـ لا ينتمي إلى G ، وهو ما يعني أنّ $4\mathcal{R}4$ غير واردة البتّة .

وبشأن الثانيّة ، تعلّمنا من الهندسة الإقليديّة[4] الأولية أنّ مستقيما ما D لايكون عموديا على ذاته ، ممّا ينفي حالة $D\mathcal{R}D$. وأخيرا ، إذا توقّفنا عند العلاقة الأخيرة واجهنا بخصوصها انتفاء المساواة $n = 2n+1$ ؛ وهوما يلغي $n\mathcal{R}n$.

لنعتبر في $\mathbb{N}$ العلاقة $\mathcal{R}$ المعرّفة بـ :

$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow m = n.$$

إنّها انعكاسيّة بداهة !

4.4.1 تعريف

نقول عن علاقة $\mathcal{R}$ في E إنّها *تناظريّة* إذا أذعنت لهذا الشرط :

$$\forall\, x,y \in E \;\; x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x.$$

فإذا عدنا ـ على سبيل المثال ـ الى الأنماط المستعرضة في الطائفة (3.1.2) وجدنا العلاقة الثالثة هي الوحيدة المتناظرة . وبالطبع ، فالمساواة التي ذكرناها أعلاه تناظريّة . يمكن أن نأتي الى جانبها بعلاقة التوازي في مجموعة مستقيمات المستوي :

$$D\mathcal{R}D' \Leftrightarrow D // D'.$$

والتي هي تناظريّة .

تجدر الإشارة هنا إلى أنّ كون علاقة ما تناظريّة يفيد أنّها *متطابقة مع علاقتها العكسيّة* .

5.4.1 تعريف

نسمّي علاقة *ضد تناظريّة* في E كلّ علاقة $\mathcal{R}$ تتمتّع بالخاصية هذه :

$$\forall\, x,y \in E \;\; \left(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x\right) \Rightarrow x = y.$$

4ـ نسبة إلى الفيلسوف والعالم الرياضي الإغريقي المشهور إقليدس (EUCLIDE) ، عاش في القرن الثالث قبل الميلاد ، واشتغل في الهندسة والفلك والفيزياء .

إذا توجّهنا الى طائفة الأمثلة (2.2.1) الآنفة الذكر والتي بدأ يكثر حولها اللغط ، لاحظنا أنّ ليس هناك وجود لعلاقات ضد تناظريّة . وبالعكس ، فإنّ العلاقات ($\leq$ ، $<$ ، $=$) في $\mathbb{N}$ وكذا العلاقة ($\subseteq$) في $\mathcal{P}(E)$ ضد تناظريّة .

6.4.1 تنبيه

إنّ لفظ " ضد تناظرية " قد يكتنفه بعض اللبس ، فيظنّ البعض أنّه نفي لخاصية التناظر . إنّ هذا عين الخطإ ! فمن الممكن لعلاقة تناظرية أن تكون ضد تناظرية كما يمكن لها الاّ تكون كذلك . هذان ضربان يوضّحان الوضعيّتين :

أ- في $\mathbb{N}$ العلاقة $\mathcal{R}$ المعرّفة بـ :

$$x\mathcal{R}y \iff y \text{ يقسم } x$$

ليست تناظريّة بيد أنّها ضد تناظريّة .

أمّا إذا نقلنا هذه العلاقة نفسها الى مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ فإنّها لا تكون تناظريّة ولا ضد تناظريّة . (انشط إن رمت الإيضاح !)

ب- في $\mathbb{Z}$ ، العلاقة $\mathcal{R}$ المعرّفة بـ :

$$x\mathcal{R}y \iff |x| \geq y$$

ليست تناظريّة ، إذ لدينا $3\mathcal{R}2$ وليس لدينا $2\mathcal{R}3$. وبالمثل ، فهي ليست ضد تناظريّة ، ذلك لإنّ لدينا $-3\mathcal{R}2$ و $2\mathcal{R}-3$ ومع ذلك $2 \neq -3$.

7.4.1 تعريف

يقال عن علاقة $\mathcal{R}$ في E إنّها متعديّة إذا حقّقت :

$$\forall\, x,y,z \in E \ \left(x\mathcal{R}y \ \wedge \ y\mathcal{R}z\right) \Rightarrow x\mathcal{R}z.$$

إن أراد القارئ العودة معي الى الأمثلة (2.2.1) ، وجد أنّ العلاقات المقدّمة له ليست متعدية جميعها . فبخصوص الأولى ، نجد عبر G أنّ $5\mathcal{R}9$ و $9\mathcal{R}8$ (مثلا) و $5\mathcal{R}8$ ومع ذلك لا وجود لـ $5\mathcal{R}8$.

أمّا حالة $\mathcal{R}$ الثانية ، فحكايتها معروفة منذ إقليدس :

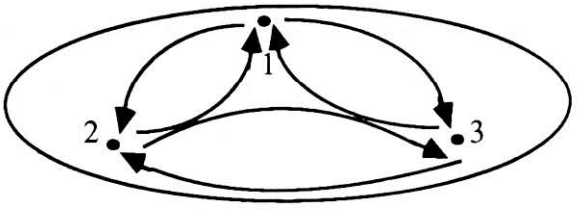
$$\left.\begin{array}{l} D\perp D \\ D'\perp D'' \end{array}\right\} \Rightarrow D /\!/ D''$$

(المستقيمان العمودان على مستقيم ثالث متوازيان .) العلاقة الثالثة تتطلّب حسابا بسيطا يبرّؤها من التعدية . ولا أخالك تقعد عن امتحان ذلك .

إلى جانب هذه ، يمكن ذكر التساوي في $\mathbb{N}$ ، التوازي في مجموعة مستقيمات المستوي والإحتواء في $\mathcal{P}(E)$. إنّها متعدية بكلّ وضوح. سوف نزيدك منها بعد حين !

8.4.1 ملحوظة

من خلال ما جاء ، يتبيّن أنّ هناك من العلاقات ما يتمتّع بصفة واحدة فقط من الأربع المشروحة (التعامد مثلا) ، أو بإثنتين مثل هذه العلاقة الموضّحة بيانيا :



(إبحث عن الخاصيتين المعنيتين)

أو بثلاثة (مثل الإحتواء) أو بجميعها (مثل التساوي) . وفوق كلّ هذا وذاك ، هناك علاقات مجرّدة من كلّ هذه الصفات . إنّه حال العلاقة (٣) من (2.4.1) .

5.1 علاقات التكافؤ

1.5.1 تعريف

تكون علاقة $\mathcal{R}$ في مجموعة E علاقة تكافؤ إذا كانت *انعكاسية وتناظرية ومتعدية* .

2.5.1 امثلة

أ- افرز العلاقات التكافئية من جميع العلاقات التي مرّت بك .

ب - لتكن E مجموعة طلبة قسم الرياضيات و$\mathcal{R}$ العلاقة المعرّفة في E بـ :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \text{x و y مولودان في شهر واحد}$$

جـ - نفترض $E = \mathbb{Z}$ ونضع :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \text{x-y يقبل القسمة على 2}$$

د- في مجموعة نقاط المستوي الإقليدي E نثبّت نقطة A ونعرّف العلاقة :

$$M\mathcal{R}N \Leftrightarrow \text{M و N في مسافة واحدة إلى A}$$

إنّه ليس صعبا التأكّد من أنّ هذه العلاقات تكافئية .

3.5.1 تعريف

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ في مجموعة E . نسمّي *صفا* (أو *صنفا*) *تكافئيًا* وفق $\mathcal{R}$ كلّ مجموعة جزئية من E نكون مؤلفة من عناصر تربط $\mathcal{R}$ بينها .

وبصفة أدقّ ، وتبعا لتعدية $\mathcal{R}$ تكون هذه العناصر المعنية مرتبطة بواسطة $\mathcal{R}$ بواحد منها . فإذا كان a هو هذا العنصر، جاء صفّه التكافئي المرموز له بـ C(a) معرّفا بـ $C(x) = \{x \in E \,/\, a\mathcal{R}x\}$ ؛ وقد يرمز له أيضا بـ $\dot{a}$ أو $\bar{a}$. سنحتفظ على مدار ما تبقّى بالترميزة الأخيرة $\bar{a}$. وطلبا لترسيخ المفهوم في الأذهان نكتب من جديد $\bar{a} = \{x \in E \,/\, a\mathcal{R}x\}$.

يسمّى العنصر a *ممثل الصف* ، وهو ينتمي إلى $\bar{a}$ ؛ ممّا يجعل هذا الأخير غير *خال على الدوام* .

4.5.1 امثلة

١- في المثال (ب) أعلاه نجد أنّ هناك 12 صفًا تكافئيًا ممثّلة في عدد أشهر السنة

الإثنى عشر . قد يكون بعضها ، بطبيعة الحال ، خاليا .

٢ـ في المثال (جـ) أعلاه ، يكون عنصران x وy من $\mathbb{Z}$ متكافئين إذا انتميا معا إمّا إلى مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية وإمّا إلى مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجيّة . هاتان المجموعتان تمثّلان الصفين التكافئيّين الوحيدين للعلاقة المعتبرة . يمكن تمثيلهما كما جرت العادة ، بـ $\overline{1}$ و $\overline{0}$ على الترتيب .

دفعا للملل عنك ، نقوم بتفصيل الأمر لك من خلال هذين المثالين :

٣ـ نعتبر في المثال (د) المارّ بك النقاط $P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ المثبّتة و $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $N\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

لدينا :

$$M\mathcal{R}N \Leftrightarrow (a-x)^2+(b-y)^2 = (a-x')^2+(b-y')^2 .$$

وعليه ، يأتي توا :

$$\begin{aligned}\overline{P} &= \left\{M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E \ / \ P\mathcal{R}M\right\} \\ &= \left\{M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E \ / \ (a-a)^2+(b-b)^2 = (a-x)^2+(b-y)^2\right\} \\ &= \left\{M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E \ / \ (a-x)^2+(b-y)^2 = 0\right\} = \left\{P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

إذن $\overline{P} = \{P\}$.

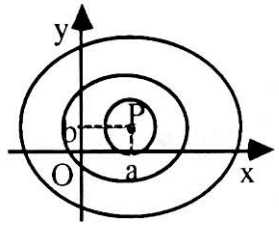
ومن أجل نقطة كيفية $M\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ نجد أنّ صفّها التكافئي :

$$\overline{M} = \left\{M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E \ / \ (a-\alpha)^2+(b-\beta)^2 = (a-x)^2+(b-y)^2\right\}$$

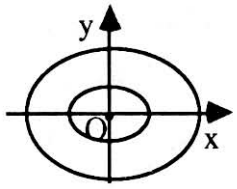
هو الدائرة المتمركزة عند P وذات نصف القطر طول القطعة PM . وبالخصوص ، إذا كانت $O = P$ و $M\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ وجدنا $\overline{M} = \left\{M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E \ / \ x^2+y^2 = 5\right\}$ ؛ وهي

الدائرة المتمركزة عند المبدإ O وذات نصف القطر $\sqrt{5}$.

هكذا ، وبصفة عامة ، تتشكّل مجموعة صفوف التكافؤ لعلاقتنا الحاضرة من الدوائر المتمركزة عند P وذات نصف القطر PM .



حالة $P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



حالة $P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

٤ـ لتكن في المجموعة $E = \mathbb{Z}$ العلاقة $\mathcal{R}$ التالية :

$$x\mathcal{R}y \iff (x+1)^2 = (y+1)^2 .$$

إنّ نظرة مشفوعة بخصائص علاقة المساواة تبيّن أنّ $\mathcal{R}$ تكافئية (لا تكتف بهذه الجملة الخبرية ، بل انشط لتبرير ما قيل حسابيا) . لنعيّن $\overline{0}$ و $\overline{2}$. لدينا :

$$\overline{0} = \left\{x\in \mathbb{Z} \ / \ 0\mathcal{R}x\right\} = \left\{x\in \mathbb{Z} \ / \ 1 = (x+1)^2\right\}$$
$$= \left\{x\in \mathbb{Z} \ / \ x(x+2) = 0\right\} = \{0,-2\} .$$

وبالمثل ، يأتي :

$$\overline{2} = \left\{x\in \mathbb{Z} \ / \ 2\mathcal{R}x\right\} = \left\{x\in \mathbb{Z} \ / \ 9 = (x+1)^2\right\}$$
$$= \left\{x\in \mathbb{Z} \ / \ (x+4)\,(x-2) = 0\right\} = \{2,-4\} .$$

قبل المضي في كشف المزيد من خبايا هذا المفهوم ، نستذكر معا هذا الـ :

5.5.1 تعريف

نسمّي *تجزئة* لمجموعة غير خالية E كلّ جماعة جزئية $\mathcal{A}$ من جماعة أجزاء E الكليّة $\mathcal{P}(E)$ تستجيب للشروط الثلاثة الآتية :

١ـ $\phi \notin \mathcal{A}$ ؛ ٢ـ E تعدل اتّحاد عناصر $\mathcal{A}$ ؛ ٣ـ عناصر $\mathcal{A}$ ليست متقاطعة مثنى مثنى ، أي إذا كان A وB عنصرين متمايزين من $\mathcal{A}$ أضحى تقاطعهما غير خال .

لتوضيح الرؤية ، نضرب مثال مجموعة الأعداد الطبيعية التي تشكّل مجموعتا الأعداد الزوجيّة والأعداد الفرديّة تجزئة لها بكل جلاء .

6.5.1 قضية

كلّ صفّين تكافئيّين وفق $\mathcal{R}$ في E غيرمتقاطعين ما لم يكونا متطابقين .

إثبات

لنفترض أنّ $\overline{a}$ و $\overline{b}$ صفّان تكافئيّان غير متطابقين ولنفترض جدلا أنّهما متقاطعان يوجد عندئذ عنصر c من E ينتمي إلى التقاطع $\overline{a} \cap \overline{b}$. وعليه، يأتي $a\mathcal{R}c$ و$c\mathcal{R}b$ أي $\overline{a} = \overline{b}$ ، وهذا يتنافى والفرض .

نستند إلى هذه التوطئة لوضع هذه الـ :

7.5.1 مبرهنة

إنّ مجموعة صفوف التكافؤ لعلاقة $\mathcal{R}$ في E تؤلّف تجزئة لـ E .

إثبات

علينا أن نبيّن بطبيعة الحال :

$$\begin{cases} E = \bigcup_{x \in E} \overline{x} & (*) \\ \overline{x} \cap \overline{y} = \phi \quad (x \neq y) . & (**) \end{cases}$$

نلاحظ أنّ العلاقة (**) هي بالضبط النتيجة المحمولة في القضيّة السابقة . لنعتن بالعلاقة الأولى (*) . لدينا بالطبع $\overline{x} \subset E$ ، مهما يكن x من E . إذن :

$$\bigcup_{x \in E} \overline{x} \subset E .$$

وبالعكس ، نستفيد من انعكاسيّة $\mathcal{R}$ أنّ :

$$\forall\, x\in E \quad x\in \overline{x}\ .$$

وعليه $E \subset \bigcup_{x\in E} \overline{x}$ ، وهو ما يوصل إلى المساواة المنشودة وينهي البرهان .

في الواقع ، فإنّ حسابا بسيطا يظهر أنّ لمبرهنتنا هذه عكسا صحيحا . وبعبارة أدقّ يمكن لكلّ تجزئة لـ E أن تكون منطلقا لتعريف علاقة تكافؤ على E تتمتّع بعناصر التجزئة صفوفا تكافئيّة لها . وفعلا ، إذا رمزنا بـ $\mathcal{V}$ لتجزئة في E ووضعنا :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists\, A\in \mathcal{V} \ /\ x,y\in A$$

جاء على الفور أنّ $\mathcal{R}$ علاقة تكافئيّة دون أن يستنكر ذلك أحد ! (اجر الحساب الضروري إن ساورك شكّ) . هكذا ، يكون بمقدورنا أن نلخّص هذه النتيجة الهامّة في إطارها الجديد هذا :

8.5.1 مبرهنة

كلّ تجزئة لمجموعة E تعرّف علاقة تكافؤ في E وبالعكس .

إنّ لمجموعة صفوف تكافؤ $\mathcal{R}$ إسما . إنّه متضمّن في هذا الـ :

9.5.1 تعريف

نسمّي مجموعة قسمة E على علاقة تكافئيّة $\mathcal{R}$ المجموعة المرموز لها بـ $E/\mathcal{R}$ والمؤلّفة من كافّة صفوف تكافؤ $\mathcal{R}$.

يدعى التطبيق $s : E\to E/\mathcal{R}$ المعرّف بـ $\overline{x} = s(x)$ *بالتطبيق القانوني* . ولمّا كان غامرا بكلّ وضوح (افحص ذلك) سُمي أيضا *بالغمر القانونيّ* .

لقد أصبح لدى القارئ ، حاليا ، تطبيقان خاصّان يلفّهما تشابه لفظي ؛ ونعني التباين القانوني السالف ذكره والغمر القانوني الماثل أمامنا . ودفعا لأيّ لبس محتمل ننصح ، ملحّين ، القارئ على التمرّن والقيام بما يضمن ترسيخهما في ذهنه حتّى يألفهما ولايخلط بينهما . سوف يجدهما في طريقه تقريبا حيثما اتّجه في فروع الرياضيات مستقبلا .

في نهاية هذه الفقرة ، نبيّن أنّ كلّ تطبيق f من E نحو F يمكن وضعه تحت شكل تركيب للتطبيقين : التباين القانوني i والغمرالقانوني s وتطبيق آخر g نجدذكره وتمييزه في هذا التفصيل للفكرة :

10.5.1 مبرهنة (التفكيك القانوني لتطبيق)

ليكن f تطبيقا من E نحو F .

١ـ إنّ العلاقة $\mathcal{R}$ المعرّفة في E بـ :

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$$

علاقة تكافؤ .

٢ـ يوجد تطبيق وحيد g من $E/\mathcal{R}$ نحو f(E) بحيث $f = i \circ g \circ s$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & F \\ E/\mathcal{R} \arrow[r, "g"'] & f(E) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

إثبات

١ـ إذا استندنا إلى انعكاس وتناظر وتعدية علاقة التساوي تبيّن بجلاء أنّ $\mathcal{R}$ تكافئيّة .

٢ـ ليكن u عنصرا من $E/\mathcal{R}$ ولنختر ممثّلا x لـ u . إنّ f(x) لا يتعلّق بالممثّل x وإنّما يتعلّق باختيار u فقط . وبالفعل ، إذا كان x' ممثّلا اخر لـ u جاء توا :

$$x\mathcal{R}x' \iff f(x) = f(x')$$

بعد هذا نضع $g(u) = f(x)$. إنّ التطبيق g يلبّي المطلوب . لامتحان ذلك نتّبع الخطوات الموالية :

أولا ، نلاحظ أنّه مهما يكن a من E فإنّ s(a) يتمتّع بـ a ممثّلا له . وعليه :

$$g(s(a)) = f(a).$$

وفضلا عن ذلك ، يكون لدينا $i[g(s(a))] = g(s(a)) = f(a)$ ، وبالتالي :

$$i \circ g \circ s = f .$$

ثانيا ، لنبيّن أنّ g وحيد . لنفترض ، بغية ذلك ، أنّ h تطبيق آخر من $E/\mathcal{R}$ نحو $f(E)$ بحيث $i \circ h \circ s = f$ ولنظهر أنّه من أجل كلّ u من $E/\mathcal{R}$ يكون $h(u) = g(u)$ ليكن x ممثّلا لـ u ، أي $u = s(x)$. نكتب عندئذ :

$$g(u) = i(g(u)) = i[g(s(x))] = f(x)$$
$$h(u) = i(h(u)) = i[h(s(x))] = f(x) .$$

وعليه $h(u) = g(u)$ ، أي $h = g$ ، وهو ما يفيد أنّ g وحيد .

ثالثا ، نفحص تقابليّة g . إذا كان y عنصرا من $f(E)$ وجد آنئذ عنصر x من E بحيث $f(x) = y$. ومنه :

$$y = f(x) = i[g(s(x))] = g(s(x)).$$

ولمّا كان $s(x)$ عنصرا من $E/\mathcal{R}$ تبيّن أنّ g غامر.

لننه البرهان بإبراز تباين g . ليكن ، قصد ذلك ، u و u' عنصرين من $E/\mathcal{R}$ بحيث $h(u) = h(u')$ ، وليكن x و x' ممثّلين لـ u و u' على التوالي . نكتب عندئذ :

$$g(u) = g(u') \Leftrightarrow f(x) = f(x') \Leftrightarrow x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow u = u'.$$

و.هـ.م

11.5.1 مثال

إذا اعتبرنا التابع الحقيقي f المعرّف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2$ وجدنا أنّ :

$$x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow f(x) = f(x') \Leftrightarrow x^2 = x'^2 \Leftrightarrow x' = \pm x^2$$

وعليه $\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\}$ و $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ مما يسمح بتعريف التابع g بـ :

$$\mathbb{R}/\mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$$
$$(x,-x) = \overline{x} \to g(x) = f(x) = x.$$

6.1 علاقات الترتيب

1.6.1 تعريف

نسمّي علاقة ترتيب في مجموعة E كلّ علاقة ثنائية $\mathcal{R}$ تكون *انعكاسيّة وضد تناظريّة ومتعديّة* .

يقال عن الزوج $(E,\mathcal{R})$ إنّه *مجموعة مرتّبة* .

2.6.1 امثلة

١- $(\mathbb{N}, \leq)$ و $(\mathbb{Z}, =)$ و $(\mathcal{P}(E))$ مجموعات مرتّبة .

(بمعنى أنّ العلاقات المرافقة لها علاقات ترتيبية .)

٢- العلاقة $\mathcal{R}$ المعرّفة في $\mathbb{Z}$ بـ :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y \text{ يقسم } x$$

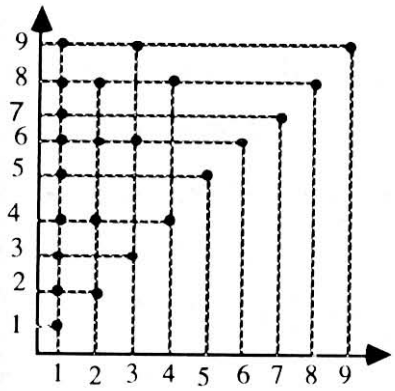
ليست علاقة ترتيب . فهي ، وإن كانت انعكاسية ومتعدية ، ليست ضد تناظرية .

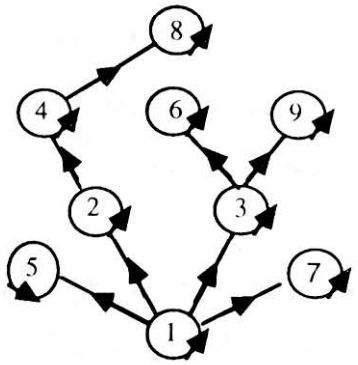
وبالفعل فلو حدث العكس ، لتمكّنّا من كتابة :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists\, q\in \mathbb{Z} \;/\; y = qx \qquad (1)$$
$$y\mathcal{R}x \Leftrightarrow \exists\, q'\in \mathbb{Z} \;/\; x = q'y \qquad (2)$$

وإذا ضممنا (2) إلى (1) حصلنا على $y = qq'y$. ومنه $y\,(1-qq') = 0$. ولمّا كان y غير معدوم أضحى $1 = qq'$ وهو ما ينتج عنه $q = q' = 1$ أو $q = q' = -1$. إنّ الحالة المحتملة الأخيرة تُفضي إلى أنّ $-y = x$ ، وهو ما ينفي تساوي x و y ويجرّد $\mathcal{R}$ من خصلة ضد التناظر.

٣- إذا استبدلنا $\mathbb{Z}$ بـ $\mathbb{N}$ أضحت $\mathcal{R}$ السابقة ترتيبيّة . وإذا اقتصرنا هذه العلاقة على المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ حصلنا بشأن $\mathcal{R}$ على التمثيلين أسفله .(في التمثيل السهمي ، وجّهنا السهام من القاسم نحو المقسوم ، وترجمنا انعكاسية $\mathcal{R}$ بسهام دائرية .)





إنّ نظرة متفحّصة في المثالين $(\mathbb{N}, \leq)$ و$(\mathbb{N}, \mathcal{R})$ تظهر أنّ بينهما فرقا هاما يتجلّى في كون العلاقة الترتيبية الأولى $\leq$ يمكن بموجبها أن نكتب :

$$\forall\, x,y \in \mathbb{N} \quad x \leq y \text{ أو } y \leq x .$$

وهو ما يترجم بالقول إنّ أيّ عنصرين من $\mathbb{N}$ تمكن *مقارنتهما* بواسط العلاقة $\leq$. إنّ الأمر خلاف ذلك بالنسبة للعلاقة $\mathcal{R}$ ، إذ لدينا ، على سبيل المثال ، لا 3 يقسم 5 ولا 5 يقسم 3 . نقول ، والحال هذه ، إنّ 3 و5 *غير قابلين للمقارنة* وفق $\mathcal{R}$. إنّه حال علاقة الإحتواء $(\subseteq)$ في $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. نخلص من هذه الملاحظة إلى وضع هذا الـ :

3.6.1 تعريف

نقول عن علاقة ترتيب $\mathcal{R}$ في مجموعة E إنّها علاقة *ترتيب كلّيّ* إذا أذعنت للشرط :

$$\forall\, x,y \in E \quad x\mathcal{R}y \;\vee\; y\mathcal{R}x .$$

ونسمّي *سلسلة* في مجموعة مرتّبة كل جزء منها يكون مرتّبا *كليا* .

هكذا ، إذا أخذنا المجموعة $E = \{a,b,c\}$ واعتبرنا $A = \{\{a,b\},\{a\},\phi,\ E\}$ جاء توا A أنّ سلسلة من $(\mathcal{P}(E),\subset)$.

وكذلك ، إذا اعتبرنا $\mathbb{N}$ المزوّدة بالعلاقة المنصوص عليها في المثال (٣) أعلاه ، اتّضح

أنّ الجزأين $A = \{1,2,4,8,16\}$ و $B = \{7,21,35,63,105\}$ سلسلتان منها.

وبالطبع ، إذا كانت $(E,\mathcal{R})$ مرتّبة كليا ، فكل جزء منها يضحى سلسلة .

وأخيرا ، نقول عن الترتيب إنّه جزئي إذا وجد عنصران x و y من E بحيث لا $x\mathcal{R}y$ تحقّق ولا $y\mathcal{R}x$.

من المألوف في أدب الرياضيات اللجوء إلى إدراج الرمز $\leq$ للدلالة على علاقة ترتيب ما أسوة بالعلاقة الترتيبيّة التقليديّة المتداولة في مجموعات الأعداد . غير أنّ التجربة أثبتت أنّ كثيرا من الطلبة غالبا ما يميلون إلى الخلط بين هذين الرمزين ، لتعوّدهم على الثانية في المراحل السابقة من تعليمهم . هكذا ، كلّما طرق مسمعهم ذكر علاقة ترتيب ارتسمت في مخيلتهم العلاقة المذكورة وانطلقوا بها في أعمالهم ؛ وكثيرا ما يكون ذلك مصدر كوارث في نتائجهم . لذا ، **سنتمسّك هنا بالرمز $\mathcal{R}$ للدلالة على علاقة ترتيب ما وسنظلّه حتّى "ييأس" الطالب من علاقته الأولى ونتأكّد ، نحن ، من أنّ اللبس قد رُفع !**

4.6.1 ملحوظة

مقصور علاقة ترتيب $\mathcal{R}$ على جزء A من E يشكّل علاقة ترتيب على A .

5.6.1 تعريف

ليكن A جزءا غير خال من $(E,\mathcal{R})$. نقول عن عنصر a من A إنّه عنصر *أكبر* في A إذا حقّق :

$$\forall\, x \in A \quad x\mathcal{R}a$$

ونرمز له بـ $a = \mathrm{Max}\ A$. (نقول أحيانا إنّ a ***أمام*** كل عنصر x من A .)

ونقول عن عنصر b من A إنّه عنصر *أصغر* في A إذا حقّق :

$$\forall\, x \in A \quad b\mathcal{R}x$$

ونرمز له بـ $b = \mathrm{Min}\ A$. (نقول أحيانا إنّ b ***وراء*** كل عنصر x من A .)

6.6.1 مثالان

١ـ ليكن $A = \{1,2,3,6\}$ جزءا من $(\mathbb{N}, \mathcal{R})$ حيث $\mathcal{R}$ هي علاقة القسمة الموصوفة في المثال (2.6.1) .

يمثّل العددان 6 و1 العنصر الأكبر والعنصر الأصغر للجزء A .

وبصفة عامة ، يتمثّل العنصر الأكبر بالنسبة إلى هذه العلاقة في المضاعف المشترك الأصغر لعناصرA ؛ بينما يتمثّل العنصر الأصغر في القاسم المشترك الأعظم للعناصر ذاتها . يترتّب عن هذه الملاحظة أنّ جزءا كيفيًا B من $(\mathbb{N}, \mathcal{R})$ قد لاينطوي على أكبر عنصر أو على أصغر عنصر أو عليهما معا . مثل :

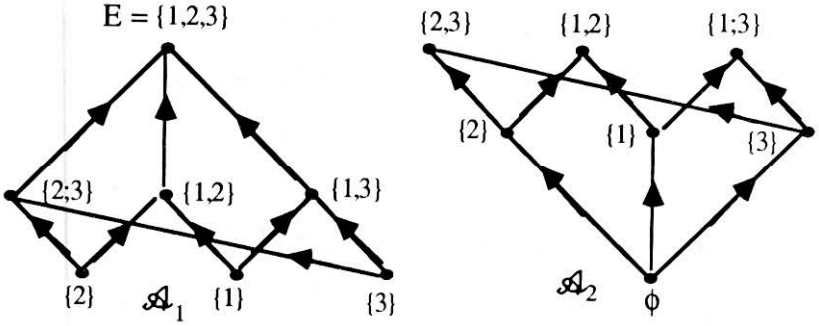
$A_1 = \{2, 3, 6\}$ لها عنصر أكبر 6 وليس لها عنصر أصغر ؛

$A_2 = \{1, 2, 3\}$ لها عنصر أصغر1 وليس لها عنصر أكبر ؛

$A_3 = \{2, 3\}$ ليس لها عنصر أصغر ولا عنصر أكبر .

وإذا بقينا في $\mathbb{N}$ وزوّدناها بالعلاقة الترتيبيّة التقليديّة $\leq$ تيقّنّا دونما عناء أنّ لكلّ من مجموعتي الأعداد الطبيعيّة الزوجيّة والفرديّة عنصرا أصغر (أذكرهما) ، بيد أنّهما لا يقبلان عنصرا أكبر .

٢ـ في $(\mathcal{P}(E), \subset)$ لدينا ϕ هو العنصر الأصغر لـ $\mathcal{P}(E)$ و E هوالعنصر الأكبر ؛ غير أنّه لو اعتبرنا $E = \{1,2,3\}$ و $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(E) - \phi$ و $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(E) - E$.



لوجدنا أنّ $\mathcal{R}_1$ لا تتمتّع بعنصر أصغر وأنّ $\mathcal{R}_2$ لا تقبل عنصرا أكبر . وبالطبع ، فإنّ للأولى عنصرا أكبر E وللثانية عنصرا أصغر ϕ . لاحظ أنّ السهام ، في حالة $\mathcal{R}_2$ ، تنطلق كلّها من ϕ في حين تصل كلّها إلى E في حالة $\mathcal{R}_1$. اختزن هذا جيّدا في مخيلتك سوف تحتاج إليه بعد حين !

7.6.1 قضية

إذا تمتّع جزء A من $(E,\mathcal{R})$ بعنصر أكبر (أصغر على التوالي) أضحى هذا الأخير وحيدا .

إثبات

لنفترض أنّ لـ A عنصرين a و a' يحقّقان $x\mathcal{R}a$ و $x\mathcal{R}a'$ أيّا كان x من A . ينتج عندئذ أنّ $a\mathcal{R}a'$ و $a'\mathcal{R}a$. وعليه $a = a'$.

تعالج الحالة الثانية بالمثل .

8.6.1 تعريف

ليكن A جزءا من $(E,\mathcal{R})$. نقول عن عنصر α من A إنّه عنصر *أعظميّ* ، إذا لم يوجد أيّ عنصر من A يكبره . وبعبارة أخرى ، يكون α أعظميّا في A إذا توفّر فيه الشرط :

$$\forall\, x\in A \quad \alpha\mathcal{R}x \;\Rightarrow\; x = \alpha .$$

ونقول عن عنصر β من A إنّه عنصر *أصغريّ* ، إذا لم يوجد أيّ عنصر من A يصغره . وبعبارة أخرى ، يكون β أصغريّا في A إذا أذعن للقيد :

$$\forall\, x\in A \quad x\mathcal{R}\beta \;\Rightarrow\; x = \beta .$$

9.6.1 مثالان

١- على ضوء المثالين الواردين أعلاه ضمن الطائفة (6.6.1) ، يأتي أنّ 2 و 3 أصغريّان في المجموعة $A_1 = \{2,3,6\}$ بالنسبة إلى العلاقة "x يقسم y " ؛ بينما

نجدهما أعظميّين في المجموعة $A_2 = \{1,2,3\}$.

٢ـ تكون العناصر $\{1\}$ و $\{2\}$ و $\{3\}$ أصغريّة في $\mathcal{A}_1$ ؛ وتكون العناصر $\{1,2\}$ و $\{1,3\}$ و $\{2,3\}$ أعظميّة في $\mathcal{A}_2$ ، وهذا ، في إطار المثال المعالج الخاص بـ $(\mathcal{P}(E),\subset)$.

10.6.1 ملحوظات

١ـ إنّ جزءا A من مجموعة مرتّبة لا يقبل بالضرورة عنصرا أكبر أو عنصرا أصغر .

نجد هذه الحالة مجسّدة في هذين الجزأين :

$$A = \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\frac{1}{n},\dots\right\} \text{ في } (\mathbb{Q},\leq)$$

$B =$ مجموعة الأعداد الطبيعيّة الفردية في $(\mathbb{N},\leq)$.

نلاحظ أنّ A لايقبل عنصرا أصغر ، وB ليس له عنصر أكبر .

٢ـ إذا تمتّع جزء A بعنصر أكبر فإنّ هذا الأخير يعتبر العنصر الأعظميّ الوحيد لـ A . في حالة العكس ، يمكن لـ A قبول عناصر أعظميّة عديدة .

٣ـ ما قيل في (٢) يصلح بشأن العنصر الأصغر والعناصر الأصغريّة .

٤ـ إذا كان الترتيب كليّا ، فإنّ كلّ عنصر أعظميّ يتطابق مع العنصر الأكبر ، وكلّ عنصر أصغريّ يتطابق مع العنصر الأصغر .

11.6.1 تعريف

ليكن A جزءا غير خال من مجموعة مرتّبة $(E,\mathcal{R})$. نقول عن عنصر a من E إنّه حاد أعلى لـ A إذا حقّق :

$$\forall\, x\in A \quad x\mathcal{R}a .$$

ونقول عن عنصر b من E إنّه حاد *أدنى* لـ A إذا حقّق :

$$\forall\, x \in A \quad b\mathcal{R}x \ .$$

12.6.1 مثالان

١- في $(\mathbb{N}, \leq)$ ، يكون كلّ عدد غيرِ معدوم حاداً أعلى لمجموعة قواسمه ؛ ويكون العدد 1 حاداً أدنى لمجموعة قواسم أيّ عدد طبيعيّ . وفي $(\mathbb{N}, \leq)$ أيضا ، يكون العدد 1995 حاداً أعلى لمجموعة الأعداد الطبيعيّة ذات ثلاثة أرقام . وأخيرا ، لاتقبل مجموعة الأعداد الطبيعيّة الفرديّة حاداً أعلى في حين نجدها تتمتّع بحاد أدنى 1 .

٢- لتكن $\mathcal{A}$ جماعة جزئيّة من الجماعة $(\mathcal{P}(E), \subset)$. إنّها تقبل حداً أدنى هو $\bigcap_{\Omega \in \mathcal{A}} \Omega = B$ ؛ كما أنّها تقبل حداً أعلى يعدل $\bigcup_{\Omega \in \mathcal{A}} \Omega = A$.

13.6.1 تعريف

لتكن $(E, \mathcal{R})$ مجموعة مرتّبة . يكون جزء A من $(E, \mathcal{R})$ *محدودا من الأعلى* (*من الأدنى على التوالي*) إذا كانت مجموعة حواده العليا (الدنيا على التوالي) غير خالية .

ويكون A *محدودا* إذا كان كذلك من الأعلى ومن الأدنى .

حري بنا أن نشير في هذا المضمار إلى أنّ تمتّع جزء A بعنصرأكبر يجعل هذا الأخير حاداً أعلى لـ A . وفضلا عن ذلك ، فهو يمثّل العنصر الأصغر لمجموعة حواده العليا. وبالطبع فإنّ هذه الإشارة تصدق على العنصر الأصغر ، بمعني أنّه إذا كان لجزء A عنصر أصغر أضحى هذا الأخير حاداً أدنى لـ A وشكّل العنصرَ الأكبر لمجموعة حواده العليا .

من المهمّ أن نثير انتباه القارئ إلى أنّ عكس ما سقناه ليس صحيحا عموما . فمن الممكن جداً أن يقبل جزء A حاداً أعلى (أدنى على التوالي) دون أن يؤدّي ذلك إلى وجود عنصرأكبر (أصغر على التوالي) . وهذا ضرب من أجزاء من$(\mathbb{R}, \leq)$ تبرز ذلك :

$$A_3 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} \; ; \; A_2 = [-2,-1[\; ; \; A_1 =]0,1]$$

نرى أنّ :

A_1 يتمتّع بـ 0 حاداً أدنى ، وليس له عنصر أصغر ؛

A_2 يقبل 1- حاداً أعلى ، وليس له عنصر أكبر ؛

A_3 يتمتّع بـ 0 حاداً أدنى ، وليس له عنصر أصغر .

14.6.1 تعريف

إذا تمتّعت مجموعة الحواد العليا لجزء A من مجموعة مرتّبة $(E,\mathcal{R})$ بعنصر أصغر سُمي هذا الأخير عندئذ *بالحدّ الأعلى* لـ A .

ويرمز له بـ **Sup A** .

وبالمثل ، إذا قبلت مجموعة الحواد الدنيا لجزء A عنصرا أكبر قيل عن هذا الأخير إنّه *الحدّ الأدنى* لـ A ورُمز له بـ **Inf A** .

15.6.1 مثال

لنعتبر في $\mathbb{N}$ المزوّدة بعلاقة الترتيب المألوفة (x يقسم y $\Leftrightarrow$ $x\mathcal{R}y$) وليكن $A = \{2,3,4,5$. نعلم أنّ مجموعة الحواد الدّنيا لـ A مؤلّفة من القواسم المشتركة لعناصر A ، كما أنّ مجموعة الحواد العليا هي المضاعفات المشتركة للعناصر ذاتها .

وظّفنا التعريف جاء توا :

(Sup A = وهو المضاعف المشترك الأصغر .

Inf A = ، ويتمثّل في القاسم المشترك الأعظم .

لاحظ أنّ هذين الحدّين لا ينتميان إلى A .)

وبالمثل ، إذا اعتبرنا $B = \{2,6,8\}$ و $C = \{3,6,9,18\}$ جاء توا :

$\text{Inf } C = 2 \in C$ ؛ $\text{Sup } C = 18 \in C$ ؛ $\text{Inf } B = 2 \in B$ ؛ $\text{Sup } B = 24 \notin$

16.6.1 تنبيه

على ضوء هذا المثال ، يتّضح أنّ حدّي جزء A الأعلى والأدنى قد لا يتنميان إليه معا ، وقد لا يفعلان معا ؛ كما أنّ A قد يضمّ أحدهما دون الآخر . والمثير للإنتباه حقّا أنّ جزءا محدودا من الأعلى (من الأدنى على التوالي) في مجموعة مرتّبة E قد لا يمتلك حداً أعلى (أدنى على التوالي) . وأبرز مثال (وقد يكون الأشهر في الأدب الرياضي) هو $(\mathbb{Q}, \leq)$. فالجزء $A = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x^2 \leq 2\}$ محدود من الأعلى (بـ 3 مثلا) ومع ذلك فإنّ Sup A (المتمثّل في $\sqrt{2}$ كما سنرى) غير موجود في $\mathbb{Q}$. تُعتبر هذه الناقصة أحد الدواعي الجوهريّة التي اقتضت البحث عن توسيع لـ $\mathbb{Q}$ ودفعت بنا إلى إعداد وتنظيم هذه المسيرة نحو الأعداد الحقيقيّة . لنختم هذا الإيضاح بالإشارة إلى أنّ الحدّين الأعلى والأدنى لجزء A ، إن وُجدا ، وحيدان . لايخرج برهان هذا الزعم عن إطار ما سيق لك في القضيّة (7.6.1) . ألا فاقتد به !

ها نحن قاب قوسين أو أدنى من نهاية الفصل الحاضر . لا شكّ في أنّك هضمت واستوعبت مفهوم الترتيب . فمهما يكن من أمر ، فنحن نفترض ذلك ونرتكز عليه لنسمح لأنفسنا بالعودة إلى استعمال الرمز $\leq$ بدل $\mathcal{R}$ لعلاقة ترتيب ما في E ؛ وذلك لاعتبارات تقنيّة بحتة . وقد يكون لأهمّية المبرهنة التي نستعدّ لوضعها دخل في هذا القرار . هكذا ، إذا كتبنا $x \leq y$ عنينا $x\mathcal{R}y$ ؛ أمّا الترميزة $x < y$ فيفهم منها أنّ $x\mathcal{R}y$ و $x \neq y$.

17.6.1 مبرهنة (الخاصية المميّزة للحدّ الأعلى)

لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتّبة غير خالية وA جزءا غير خال منها . يكون عنصر a من E حداً أعلى لـ A إذا وفقط إذا حقّق :

١ـ a حادّ على لـ A $\quad (\forall x \in A \ \ x \leq a)$

٢ـ مهما يكن b من E بحيث $b < a$ ، يوجد عنصر c من A بحيث $b < c \leq a$.

إثبات

إنّ الشرط لازم . وبالفعل، إذا كان a حداً أعلى لـ A فهو حادّ أعلى له ، ومنه (١).

ومن جهة أخرى ، إذا كان b عنصرا من E بحيث $b < a$ ، فإنّ b لا يمكنه أن يحدّ A من الأعلى . فلو فعل لتعارض ذلك مع كون a أصغر الحواد العليا . وعليه ، يوجد عنصر c من A بحيث $b < c$ ؛ ومنه الشرط (٢) .

إنّ الشرط كاف . ليكن A عنصرا من E يحقّق الشرطين (١) و(٢) . علينا أن نبيّن أنّه حدّ أعلى لـ A . الشرط (١) يفيد أنّ a حاد أعلى لـ A . بقي علينا أن نظهر أنّه أصغر حواد A العليا. نستخدم ، بغية ذلك ، البرهان بالخلف . لنفترض أنّ يوجد حادّ أعلي b لـ A بحيث $b < a$. ينجرّ عن البند (٢) وجود عنصر c من A بحيث $b < c \leq a$ ، وهو ما يتعارض مع كون b حاداً أعلى لـ A وينهي المطلوب .

18.6.1 تعريف

لتكن F مجموعة مرتّبة و f تابعا نابعا من مجموعة E ومصبًا في F . نقول عن f إنّه محدود من *الأعلى* (من *الأدنى* على التوالي) في جزء A من E إذا كانت مجموعة قيمه f(A) كذلك في F .

ونقول عن f إنّه محدود في A إذا كان كذلك من الأدنى والأعلى .

أخيرا ، نقول عن f إنّه يقبل حداً أعلى (أدنى على التوالي) في A إذا كانت f(A) تقبل ذلك . ونكتب في هذه الحالة : $\sup_A f = \sup_A f(x)$ و $\inf_A f = \inf_A f(x)$.

19.6.1 امثلة

المجموعات التي نذكرها هنا مزوّدة جميعها بالعلاقة الترتيبيّة التقليديّة $\leq$.

١- إنّ تابع ديركليت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ الذي مرّ بك :

$$x \to f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

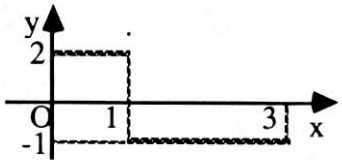
محدود على $\mathbb{R}$، ذلك لأنّ $f(\mathbb{R}) = \{0,1\}$ جزء محدود . نستنبط على الفور :

$$\operatorname*{Sup}_{\mathbb{R}} f = 1 \text{ و } \operatorname*{Inf}_{\mathbb{R}} f = 0 \cdot$$

٢ـ التابع $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعطى على النحو :

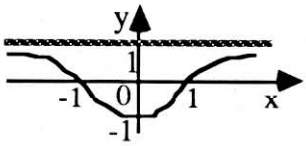
$$x \to f(x) = \begin{cases} 2 & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ -1 & ; \quad 1 < x \le 3 \end{cases}$$

محدود على الجزء $A = [0,3]$ ، إذ أنّ $f(A) = \{-1,2\}$. وبالخصوص ، يكون لدينا:



$$\operatorname*{Sup}_{A} f = 2 \text{ و } \operatorname*{Inf}_{A} f = -1 .$$

٣ـ لنعتبر التابع الحقيقيّ f المعرّف في $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. إنّ دراسة سهلة كالتي ألفتها من قبل تبيّن أنّ $f(\mathbb{R}) = [-1,1[$. ومنه $\operatorname*{Sup}_{\mathbb{R}} f = 1$ و $\operatorname*{Inf}_{\mathbb{R}} f = -1$.



لاحظ أنّ f يدرك حدّه الأدنى ولا يدرك حدّه الأعلى

20.6.1 تعريف

لتكن E وF مجموعتين مرتّبتين وf تطبيقا من E نحوF . نقول عن f إنّه *متزايد* إذا حقّق :

$$\forall\, x,y \in E \quad x \le y \quad \Rightarrow \quad f(x) \le f(y) .$$

ويكون f *متناقصا* إذا حقّق :

$$\forall\, x,y \in E \quad x \le y \quad \Rightarrow \quad f(y) \le f(x) .$$

إذا استُبدِل الرمز ≤ بالرمز > قيل عن f ، في الحالة الأولى ، إنّه *متزايد تماما* ؛ وفي الحالة الثانيّة ، إنّه *متناقص تماما* .

وأخيرا ، نقول عن f إنّه رتيب إذا كان متزايدا أو متناقصا .

هكذا ، يتذكّر الكّل أنّ التابعين الأسّي :

$$(\mathbb{R}, \leq) \to (\mathbb{R}, \leq)$$
$$x \to e^x$$

واللوغاريتمي

$$(\mathbb{R}_+^*, \leq) \to (\mathbb{R}, \leq)$$
$$x \to \mathrm{Log}x$$

متزايدان تماما على ميداني تعريفهما . ولا أخال القارئ قد نسي أنّ التابع $x \to \cos x$ المعرّف على $[0, 2\pi]$ متناقص على الجزء $[0,\pi]$ ومتزايد على الجزء الآخر $[\pi,2\pi]$.

21.6.1 تعريف

يقال عن مجموعة مرتّبة $(E,\leq)$ إنّها مرتّبة *ترتيبا جيّدا* إذا كان كلّ جزء غير خال منها متمتّعا بعنصر أصغر.

22.6.1 قضية

كلّ مجموعة مرتّبة جيّدا مرتّبة كلّيا .

إثبات

وفعلا ، إذا كان x وy عنصرين مختلفين من $(E,\leq)$ فإنّ الجزء غير الخالي $\{x,y\}$ يقبل عنصرا أصغر ممثّلا في أحد االعنصرين . وعليه ، يتّضح أنّ x وy يقبلان المقارنة إزاء العلاقة ≤ ، ممّا هو كفيل بجعل الترتيب كلّيا .

تمارين

1. أ- اثبت أنّه لكي تكون علاقة $\mathcal{R}$ على E تناظرية وضد تناظرية في آن واحد يلزم ويكفي أن تحقّق :

$$\forall\, x,y\in E \;\; x\mathcal{R}y \;\Rightarrow\; x = y.$$

ب - هل يمكن لعلاقة في E أن تكون علاقة ترتيب وتكافؤ ؟

2. لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية في مجموعة E لايضمّ بيانها Γ (غير الخالي) أيّة نقطة من قطر $E\times E$. نفترض أنّ $\mathcal{R}$ تناظرية . هل يمكن لـ $\mathcal{R}$ أن تكون متعدية ؟

*3. لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية في مجموعة E و $\mathcal{R}^{-1}$ علاقتها العكسية .

أ - إذا كانت $\mathcal{R}$ انعكاسية ، فهل تكون $\mathcal{R}^{-1}$ كذلك ؟

ب - جب على السؤال ذاته بخصوص التناظر وضد التناظر والتعدية .

4. لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية ذات بيان Γ في مجموعة E . نفترض أنّ $\mathcal{R}$ متناظرة ومتعدية وتحقّق :

$$\forall\, x\in E \;\; \exists\, y\in E \,/\, (x,y)\in\Gamma.$$

هل $\mathcal{R}$ انعكاسية ؟

5. هل يمكن لعلاقة ثنائية متناظرة وغيرانعكاسية أن تكون متعدية ؟

6. لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية انعكاسية ومتعدية في مجموعة E ولتكن $\mathcal{S}$ العلاقة المعرّفة في E بـ :

$$\forall\, x,y\in E \;\; x\mathcal{S}y \;\Leftrightarrow\; (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x).$$

ادرس خواص $\mathcal{S}$.

7. لتكن $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$ علاقتين ثنائيتين في مجموعة E و $\mathcal{S}$ العلاقة المعرّفة في E بـ :

$$x\mathcal{S}y \;\Leftrightarrow\; (x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{R}'y)$$

كما نرمز بـ $\mathcal{V}$ للعلاقة المعرّفة في E بـ :

$$x\mathcal{V}y \quad \Leftrightarrow \quad (x\mathcal{R}y \vee x\mathcal{R}'y).$$

١ـ ما هو الشرط الذي يجعل $\mathcal{S}$ إنعكاسية ؟ نفس السؤال بشأن $\mathcal{V}$.

٢ـ هل تكون $\mathcal{S}$ تناظرية لو كانت $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$ كذلك ؟

٣ـ هل يمكن لـ $\mathcal{S}$ أن تكون تناظرية دون أن تكون $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$ كذلك (استعن بمخطّط) ؟

٤ـ جب عن السؤال (٣) باستبدال $\mathcal{S}$ بـ $\mathcal{V}$.

٥ـ أثبت أنّه إذا كانت $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$ متعديتين ، غدت $\mathcal{S}$ كذلك .

٦ـ هات مثالا تكون فيه $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$ متعديتين ولا تكون فيه $\mathcal{V}$ كذلك . (يمكن استخدام مخطّطات سهميّة .)

8. نتوهّم مستقيما (D) من المستوي (P) ونعرّف في (P) العلاقات الموالية . من أجل نقطتين A وB من (P) نضع :

القطعة المستقيمة AB لا تقطع (D)	$\Leftrightarrow$	$A\mathcal{R}_1B$
القطعة المستقيمة AB تقطع (D)	$\Leftrightarrow$	$A\mathcal{R}_2B$
يوجد مستقيم عمودي على (D) يضمّ A وB	$\Leftrightarrow$	$A\mathcal{R}_3B$
الدائرة ذات القطر AB تمسّ (D)	$\Leftrightarrow$	$A\mathcal{R}_4B$
منتصف AB ينتمي إلى (D)	$\Leftrightarrow$	$A\mathcal{R}_5B$

تمعّن في كل علاقة وادل فيما إذا هي انعكاسية ، تناظرية ، ضد تناظرية ، متعدّية .

9. يقال عن علاقة $\mathcal{R}$ إنّها *دائريّة* إذا حقّقت :

$$\forall\, x,y,z\in E \;\; x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \;\Rightarrow\; z\mathcal{R}x$$

١ـ تأكّد من أنّ كل علاقة تكافؤ دائريّة .

٢ـ استخلص أنّه إذا كانت $\mathcal{R}$ علاقة دائريّة انعكاسية أضحت عندئذ علاقة تكافؤ .

10. ١ـ نعتبر في المستوي الحقيقي نقطة A ومستقيمين متعامدين A_u و A_v ونرمز بـ $\mathcal{S}_u$ و $\mathcal{S}_v$ و $\mathcal{S}_A$ لعلاقات التناظر بالنسبة إلى A_u و A_v و A على التوالي .

٢ـ عيّن التطبيقات $\mathcal{S}_u o \mathcal{S}_u$ و $\mathcal{S}_v o \mathcal{S}_v$ و $\mathcal{S}_A o \mathcal{S}_A$ و $\mathcal{S}_A o \mathcal{S}_u$ و $\mathcal{S}_u o \mathcal{S}_A$ و $\mathcal{S}_u o \mathcal{S}_v$ و $\mathcal{S}_v o \mathcal{S}_u$ و $\mathcal{S}_v o \mathcal{S}_A$ و $\mathcal{S}_A o \mathcal{S}_v$.

11. نرمز بـ $\mathcal{D}$ لمجموعة مستقيمات المستوي ونعرّف فيه علاقتين $\mathcal{R}$ و $\mathcal{S}$ بـ :

$$D\mathcal{S}D' \Leftrightarrow D /\!/ D' \ ; \ D\mathcal{R}D' \Leftrightarrow D \perp D'.$$

بيّن أنّ :

$$\mathcal{R} o \mathcal{S} = \mathcal{S} o \mathcal{R} = \mathcal{S} \ ; \ \mathcal{S} o \mathcal{S} = \mathcal{R} \ ; \ \mathcal{R} o \mathcal{R} = \mathcal{R}.$$

12. ١ـ ادل برأيك فيما إذا كانت التطبيقات الآتية متباينة ، غامرة ، تقابليّة :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R} \to [-1,1]$$
$$x \to \frac{2x}{1+x^2} \qquad\qquad x \to \frac{2x}{1+x^2}$$

$$k : [-1,1] \to [-1,1] \quad ; \quad h : [-1,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{2x}{1+x^2} \qquad\qquad x \to \frac{2x}{1+x^2}$$

٢ـ عرّف التطبيقين fol و lof حيث التابع $l : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ معطى بـ $l(x) = \frac{1}{x}$.

13. ١ـ ما هي مواصفات التطبيقات الآتية المعرّفة في المستوي :

أ ـ التناظر بالنسبة إلى نقطة ؛

ب ـ التحاكي ذو المركز O (المبدإ) والنسبة $k \neq 0$.

جـ ـ الإنسحاب وفق شعاع $\overrightarrow{AB}$ ؛ د ـ الدوران ذو المركز O والزاوية θ.

٢ـ عيّن عكوس التطبيقات التقابلية منها .

*14. لتكن $\mathcal{E}$ جماعة الأجزاء المنتهية في $\mathbb{N}$ وليكن $f : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ التطبيق المعرّف

بـ $A \to f(A) = \sum_{x \in A} x$ ، مع $f(\phi) = 0$.

أ ـ احسب $f(A)$ في حالة $A = \{0,1,2,\ldots,n\}$.

ب ـ بيّن أنّ f غامر وليس متباينا ؛ جـ ـ هات عدد عناصر $f^{-1}(\{3\})$.

15. ليكن التطبيق $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ المعرّف بـ $f(x) = \sin \pi x$.

١ـ هل التطبيق f متباين ؟ غامر؟ تقابلي ؟

٢ـ اثبت أنّ المقصور g لـ f على المجال $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ تقابلي من $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ نحو $]-1,1[$

٣ـ اثبت أنّ التطبيق $f: \mathbb{R} \to]-1,1[$ المعرّف بـ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ تقابلي ، ثمّ عيّن تطبيقه العكسيّ .

16. عيّن من بين التطبيقات الموالية تلك التي هي تضامنية :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad ; \quad g : [0,2\pi] \to [0,1] \quad ; \quad h : \mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}$$
$$x \to ax+b \qquad x \to \cos x \qquad x \to \frac{ax+b}{cx+d}$$

*17. بكل a و b و c و d من $\mathbb{Z}$ بحيث $ad-bc = 1$ ، نلحق التطبيق $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$

$$(x,y) \to f(x,y) = (ax+by,cx+dy)$$

ونرمز لمجموعة مثل هذه التطبيقات بـ $\mathcal{F}$.

أ ـ اثبت أنّ f تقابلي وأنّ f^{-1} ينتمي إلى $\mathcal{F}$.

ب ـ اثبت أنّ $\mathcal{F}$ مستقرّة إزاء قانون تركيب التوابع .

18. ١ـ أثبت أنّ تركيب تطبيقين متباينين تطبيق متباين .

٢ـ جب عن السؤال ذاته بخصوص الغمر والتقابل .

19. نعتبر التابع $g : [-1,1] \to [-2,0]$ المعطى بـ $g(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$.

١ـ اثبت أنّ g متزايد تماما على ميدان تعريفه .

٢ـ بيّن أنّ g يقبل تطبيقا عكسيًا g^{-1} يُطلب تمييز ميدان تعريفه ، ثمّ احسب $g^{-1}(x)$

*20. ١ـ هل التطبيق $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ المعطى بـ $f(x) = \text{Inf}\,(5+x, 3x)$ غامر؟ متباين ؟

٢ـ ما هي أكبر منبع يجعله تقابليا ؟

21. اثبت أنّ التطبيق $x \to f(x) = \text{Sup}\,(\frac{x+10}{5}, x-3)$ المتخذ من $\mathbb{R}$ منطلقا ومصبا ، تقابلي ثمّ احسب $f^{-1}(x)$.

*22. ليكن التابع $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (a و b و c و d أعداد حقيقيّة معطاة).

١ـ عيّن ميدان تعريف h .

٢ـ ما هو الشرط الذي ينبغي أن تحقّقه الأعداد المعطاة لكي يكون h متباينا ؟

٣ـ جد أكبر مجموعة وصول تجعل h غامرا ؛ ثمّ عيّن التطبيق العكسي h^{-1} في حالة توفّر الشروط ١ . ٢ . ٣.

*23. لتكن E مجموعة غير خالية و A عنصرا من $\mathcal{P}(E)$. نسمّي *التابع المميّز* للجزء A التابع المرموز له بـ $1_A : E \to \{0,1\}$ والمعرّف بـ :

$$x \to 1_A(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in A \\ 0 & ; \quad x \notin A \end{cases}$$

اثبت أنّ :

١ـ $1_A = 1_B \Leftrightarrow A = B$ ؛ ٢ـ $1_{A\cap B} = 1_A\, 1_B$

٣ـ $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$

٤ـ إذا كان $A \cap B = \phi$ كان عندئذ $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$.

٥ـ $1_{C_E A} = id_E - 1_A$

24. ليكن f تطبيقا من E نحو F . أثبت أنّه لكي يكون f تقابليا يلزم ويكفي أن تقبل المعادلة $y = f(x)$ ، $y \in F$ ، حلاً وحيدا في E .

25. لتكن E و F ثلاث مجموعات وليكن $f, g: E \to F$ تطبيقين . اثبت أنّ :

١ـ $g \circ f$ متباين $\Leftarrow$ f متباين ؛ ٢ـ $g \circ f$ غامر $\Leftarrow$ g غامر .

26. ليكن f تطبيقا من E نحو F .

١ـ اثبت أنّ :

أ ـ f متباين $\Leftarrow$ $\forall A \subset E \quad f(C_E A) \subset C_F f(A)$

ب ـ f غامر $\Leftarrow$ $\forall A \subset E \quad C_F f(A) \subset f(C_E A)$

٢ـ نضع $f^n = \underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{\text{n مرة}}$. اثبت أنّ :

أ ـ f^n متباين $\Leftarrow$ f متباين ؛ ب ـ f^n غامر $\Leftarrow$ g غامر .

*27. لتكن E مجموعة غير خالية و A و B عنصرين من $\mathcal{P}(E)$. نعتبر التطبيق :

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$

$$X \to f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

١ـ بيّن أنّ :

أ ـ f متباين $\Leftrightarrow$ $A \cup B = E$ ب ـ f غامر $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \phi$

٢ـ هات شرطا لازما وكافيا يجعل f تقابليا ؛ ثمّ عيّن f^{-1} .

28. ليكن f تطبيقا من مجموعة E نحو E . اثبت عندئذ تكافؤ الدعاوى الثلاث التالية :

١ـ f متباين ؛ ٢ـ $\forall\, a\in E\ \ f^{-1}(\{f(a)\}) = \{a\}$

٣ـ $\forall\, A\in \mathcal{P}(E)\ \ f^{-1}(f(A)) = A$

*29. ليكن f تطبيقا من مجموعة E نحو أخرى F .

اثبت تكافؤ الدعاوى الثلاث التالية :

١ـ f غامر ؛ ٢ـ $\forall\, b\in F\ \ f(f^{-1}\{b\}) = \{b\}$

٣ـ $\forall\, B\in \mathcal{P}(F)\ \ f(f^{-1}(B)) = B$

*30. ليكن n عددا طبيعيا معطى .

١ـ بيّن أنّه يوجد زوج وحيد (a,b) من الأعداد الطبيعيّة بحيث :

$$b = n - \frac{a(a+1)}{2} \text{ و } b \le a$$

٢ـ اثبت أنّ $f : (a,b) \to b + \frac{(a+b)\,(a+b+1)}{2}$ تقابلي من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{N}$.

*31. ليكن f تطبيقا من E نحو F .

١ـ برهن أنّه لكي يكون f متباينا يلزم ويكفي أن يوجد تطبيق $r: F \to E$ بحيث $r\circ f = id_E$ (يدعى التطبيق r *بانقباض* f).

٢ـ بيّن ، بالمثل ، برهن أنّه لكي يكون f غامرا يلزم ويكفي أن يوجد تطبيق $s : F \to E$ بحيث $f\circ s = id_F$ (يسمّى s *مقطع* f) .

32. ليكن f تطبيقا من E نحوF .

١ـ برهن أنّه لكي يكون f متباينا يلزم ويكفي أن يحقّق الشرط :

مهما تكن المجموعة C ومهما يكن التطبيقان g و h من C نحو E فإنّ :

$$f\circ g = f\circ h \quad \Rightarrow \quad g = h.$$

٢ـ وبالمثل ، برهن أنّه يكون f غامرا إذا وفقط إذا توفّرت فيه هذه الميزة :

مهما تكن المجموعة D ومهما يكن التطبيقان u و v من F نحو D فإنّ :

$$u \circ f = v \circ f \quad \Rightarrow \quad u = v.$$

*33. لتكن E مجموعة منتهية و f تطبيقا يتّخذ من E منطلقا ومستقراً له . برهن أنّ:

f متباين $\Leftrightarrow$ f غامر $\Leftrightarrow$ f تقابليّ

34. لتكن E و F مجموعتين منتهيتين بحيث $\operatorname{card} E = m$ و $\operatorname{card} F = n$.

(رمزنا بـ $\operatorname{card} E$ لأصلي المجموعة E والذي يعني عدد عناصر E) .

١ـ ما هي جميع التمديدات الممكنة لتطبيق $f : E \to F$ إلى المجموعة $E \cup \{a\}$ ؟

٢ـ اثبت ، منتهجا البرهان بالتدريج ، أنّ عدد التطبيقات النابعة من E والمنصبّة في F يعدل n^m .

35. لتكن E و F مجموعتين غير خاليتين . نرمز بـ $\mathcal{A}(E,F)$ لجماعة التطبيقات المنطلقة من E والمستقرّة في F . نفترض أنّ المجموعة E تتكوّن من n عنصرا ، ونعتبر التطبيق

$$\psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{A}(E,\{0,1\})$$
$$A \to \psi(A) = 1_A$$

حيث 1_A هو التطبيق المميّز لـ A . (راجع التمرين 23) .

١ـ اثبت أنّ التطبيق ψ تقابلي.

٢ـ استخلص عدد عناصر $\mathcal{P}(E)$.

*36. ١ـ لتكن $\mathcal{R}$ العلاقة الثنائية المعرّفة في $\mathbb{R}$ بـ :

$$a \mathcal{R} b \quad \Leftrightarrow \quad a^3 - b^3 = a - b$$

أ ـ بيّن أنّ $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ ؛ ب ـ عيّن $\overline{a}$ ، حيث a من $\mathbb{R}$.

٢ـ لتكن $\mathcal{R}$ العلاقة الثنائية المعرّفة في $\mathbb{Z}$ بـ :

$$x \mathcal{R} y \quad \Leftrightarrow \quad |x| - |y| = x - y$$

أ ـ بيّن أنّ $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ ؛ ب ـ عيّن $\overline{2}$ و $\overline{-2}$.

37. لتكن $\mathcal{R}$ العلاقة الثنائية المعرّفة في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بـ :

$$(x,y)\mathcal{R}\,(x',y') \iff x+y' = x'+y$$

١ـ بيّن أنّ $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ ؛ ٢ـ عيّن $\overline{(0,0)}$.

38. لتكن E مجموعة غير خالية و$\mathcal{P}(E)$ جماعة أجزاء E .

١ـ نعرّف في $\mathcal{P}(E)$ العلاقة :

$$A\mathcal{R}B \iff \begin{cases} A = B \\ \vee \\ \exists\, C\in \mathcal{P}(E) \;/\; A\cap C \neq \phi . \end{cases}$$

أ ـ بيّن أنّ $\mathcal{R}$ تكافئيّة ؛ ب ـ هات $\overline{\phi}$.

٢ـ نعتبر جزءا H من $\mathcal{P}(E)$ التي نعرّف فيها العلاقة $\mathcal{S}$:

$$A\mathcal{S}B \iff A\cap H = B\cap H$$

أ ـ بيّن أنّ $\mathcal{S}$ تكافئيّة ؛ ب ـ عيّن $\overline{\phi}$.

39. لتكن $\mathcal{R}$ و$\mathcal{S}$ علاقتين ثنائيّتين معرّفتين في $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ بـ :

$$f\mathcal{R}g \iff \exists\, c>0 \;/\; f(x) = g(x)\;;\; |x| > c$$

$$f\mathcal{S}g \iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^n} = 0 .$$

اثبت أنّ $\mathcal{R}$ و$\mathcal{S}$ تكافئيّتان .

*40. لتكن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ في E .يقال عن جزء A من إنّه مشبّع بالنسبة إلى $\mathcal{R}$ إذا وفقط إذا احتوى الصفّ التكافئيّ لكل واحد من عناصره . برهن أنّ :

١ـ A مشبّع $\iff$ A يطابق اتّحاد صفوف تكافؤ عناصره

٢ـ A مشبّع $\iff$ $s^{-1}(s(A)) = A$ (حيث s هو الغمر القانوني).

٣ـ اتّحاد أجزاء مشبّعة مشبّع ؛ ٤ـ تقاطع أجزاء مشبّعة مشبّع .

٥ـ $s^{-1}(s(A))$ مشبّع ويحتوي A ومحتوى (بدوره) في أيّ جزء مشبّع يضمّ A .

41. جد التفكيك القانوني للتطبيقين التاليّين :

أ- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ؛ ب- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = x^3 - 1$ $\qquad$ $x \to g(x) = \sin x$

*42. في المستوي الإقليدي $\mathbb{R}^2$ ، المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس Oxy ، نعرّف العلاقة :

$$P\mathcal{R}P' \Leftrightarrow xy = x'y'$$

حيث (x,y) و (x', y') يمثّلان أحداثيات النقطتين P و P' .

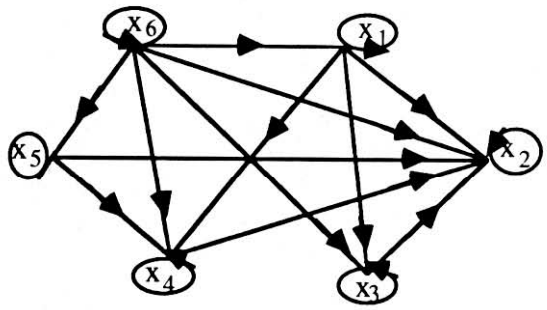
١- بيّن أنّ $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ ؛ ٢- عيّت صفوفها التكافئيّة .

٣- نعرّف علاقة ثانية $\mathcal{S}$ بـ :

$$P\mathcal{S}P' \Leftrightarrow (xy = x'y' \wedge xx' > 0)$$

بيّن أنّ $\mathcal{S}$ علاقة تكافؤ.

43. لتكن المجموعة $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ من $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.



نفترض أنّ عناصرها مرتّبة بواسطة علاقة ترتيب ممثّلة بالمخطّط السهمي أعلاه .

١- هل توجد حواد عليا لـ A في A ؟ ٢- هل توجد حواد عليا لـ A في $\mathbb{R}$ ؟

٣- هل تقبل A حداً أعلى في A ؟ نفس السؤال بشأن الحدّ الأدنى .

٤- هل تقبل A عنصرا أكبر ؟ عنصرا أصغر ؟

44. نعرّف في $\mathbb{N}$ علاقة ثنائيّة $\mathcal{R}$ بـ :

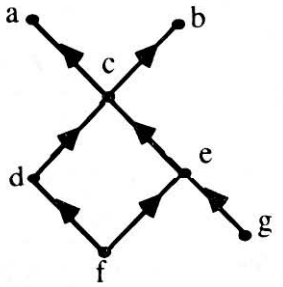
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists\, q\in \mathbb{N} \;/\; x-y = 3q.$$

١ـ بيّن أنّ $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب ؛ ٢ـ هل الترتيب كلي ؟

٣ـ مثّل سهميًا في الجزء $A = \{1,2,3,\ldots,9\}$.

٤ـ هات (في حالة وجودها) Sup A و Inf A و Max A و Min A وكذا عناصر A الأصغريّة والأعظميّة .

*45. لتكن $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ و $B = \{c, d, e\}$ جزءا منها . نفترض أنّ A مرتّبة بواسطة علاقة ترتيب ما تتمتّع بالمخطّط السهمي الموالي تمثيلا لها :



١ـ هل يقبل B حواد عليا ؟ حواد دنيا ؟ (في A)

٢ـ هل يقبل B حدًا أعلى في A ؟ حدًا أدنى ؟

46. ١ـ هات التمثيل البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x^2-3x+2|$.

٢ـ عيّن sup f و inf f في كل واحد من المجالات $[0,3]$ و $[0,2]$ و $[1,2]$ و $[1,3]$.

٣ـ ما هو أكبر مجال يكون فيه $f\left(\frac{3}{2}\right) = \text{Sup } f$ ؟

47. لتكن $\mathcal{S}$ و $\mathcal{T}$ علاقتي ترتيب كليّ في مجموعة E ، ولتكن $\mathcal{R}$ العلاقة المعرّفة

في E بـ :

$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad (x\mathcal{S}y \ \wedge \ x\mathcal{T}y).$$

نعرّف نفي $\mathcal{R}$ المرموز له $\overline{\mathcal{R}}$ بـ :

$$x\overline{\mathcal{R}}y \quad \Leftrightarrow \quad (x\mathcal{R}y) \text{ لا } .$$

أ. هل $\overline{\mathcal{R}}$ علاقة ترتيب ؟

ب ـ عرّف $\overline{\mathcal{R}}$ بدلالة النفيين $\overline{\mathcal{S}}$ و $\overline{\mathcal{T}}$ لـ $\mathcal{S}$ و $\mathcal{T}$.

*48. لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتّبة .يقال عن جزء S من E إنّه *وراثي* إذا حقّق :

$$\forall\, x\in E\ \forall\, s\in S \quad x \leq s \quad \Rightarrow \quad x\in S.$$

لنفترض أنّ $(E, \leq)$ هي مجموعة الأعداد الطبيعيّة غير المعدومة $\mathbb{N}^*$ المرتّبة بعلاقة الترتيب $\mathcal{R}$:

$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad y \text{ يقسم } x$$

١. هات العناصرالأصفرية للجزء $\mathbb{N}^*-\{1\}$.

٢. ليكن الجزء $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

أ. ضع مخطّطا سهميا لمقصور العلاقة $\mathcal{R}$ على A .

ب ـ عيّن بعضا من أجزاء A الوراثية .

*49. لتكن E مجموعة مرتّبة تتمتّع بعنصرين أصغريّين متمايزين .

١. اثبت أنّه لا يمكن E قبول عنصر أصغر .

٢. رد على السؤال ذاته مع استبدال لفظ "أصغريّين "بأعظميّين ولفظ "أصغر" بأكبر .

*50. يقال عن ترتيب ما في مجموعة E إنّه *كامل* إذا كان كل جزء محدودٍ من الأعلى A فيها يقبل حداً أعلى . برهن أنّ كل ترتيب جيّد ترتيب كامل .