الفصل الأول
نظرية الإحتمالات

مقدمة:

نظرية الإحتمالات هي قسم من الرياضيات، يدرس الاتجاه العام للظواهر العرضية (العشوائية). تلعب هذه النظرية دورا مهما في مختلف العلوم، خاصة في العلوم الإقتصادية وعلوم الطبيعة والحياة، حيث يتم من خلالها دراسة مختلف الظواهر العرضية التي تتكرر والتي تستوجب وضع قوانين يمكن الحكم على صحته أو خطإه.

1.1- مبادئ الحساب الإحتمالي:

1.1.1- مفاهيم أساسية:

– **التجربة**: تعد من أهم المفاهيم في نظرية الإحتمالات، فهي تقوم على أساس التأكد من تحقق وصول بعض الظروف المشتركة لتجربة ما (ظروف من صنع الإنسان أو ظروف وليدة الصدفة). مثل رمي زهرة نرد، دراسة كمية التساقط في منطقة ما...

وتنقسم التجربة إلى تجربة نظامية، حيث أنه يمكن توقع نتائجها سلف على أساس قوانين علمية معروف، إنطلاقا من جملة من الشروط. والتجربة العشوائية، وهي التجربة التي يمكن تكرارها، على أن نتائجها غير محددة سلفا، فهي تعتمد على الصدفة رغم إنطلاقها من نفس الشروط.

– **فراغ العينة**: وهي مجموعة النتائج الممكنة الكلية لتجربة ما، ويمكن أن يكون غير منته (عدد غير محدود من الإمكانات)، ومنته (عدد غير محدود من الإمكانات). يرمز لفراغ العينة بالرمز Ω.

– **الحدث و أنواعه:** إن النتيجة أو النتائج المحددة من النتائج الممكنة لتجربة ما تشكل حدثا. وينقسم الحدث إلى: حدث بسيط، غير قابل للتجزئة، فهو مجموعة جزئية من فراغ العينة؛ حدث مركب، أمكن تفكيكه إلى حوادث بسيطة؛ حدث أكيد وهو حدث مؤكد يحوي جميع الحوادث البسيطة؛ حدث مستحيل، وهو حدث غير قابل للتحقق، أي أنه مجموعة خالية من المجموعة الكلية التي تمثل فراغ العينة؛ حدث متمم أو معاكس وهو حدث $\overline{A}$ مرتبط بالمجوعة Ω، يتكون من مجموعة الإمكانات الغير محققة لـــ A، حيث:

$$\overline{A} = \Omega - A \qquad (1.1)$$

حوادث متنافية و هي حوادث لا يمكن وقوعها في أن واحد ووقوع أحدها يمنع وقوع الأخر؛ حوادث غير متنافية، وهي عكس المتنافية، فوقوع A لا يمنع وقوع الحدث B ؛ حودث مستقلة و هي حوادث لا يؤثر وقوع أحدهما على الأخر؛ حوادث غير مستقلة أي مرتبطة وهي حوادث شرطية، فوقوع الحدث A يشترط وقوع الحدث B.

2.1.1- تعريف الإحتمال:

إذا كان m هو عدد الحالات الملائمة للحدث A ؛ وكان n هو عدد حالاته الممكنة، فإن إحتمال وقوع الحدث A يكون وفق العلاقة التالية:

$$1 \leq m \leq n \quad \text{حيث} \quad P(A) = \frac{m}{n} \qquad (1.2)$$

➢ **مثـــــال 1:**

ترمى قطعة نرد مرة واحدة، نجد أن فراغ العينة (الحالات الممكنة) لهذه التجربة هو:

$$n = 6 \quad \text{أي أن} \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5,6\}$$

ولحساب إحتمال الحصول على عدد زوجي، فإن الحالات الملائمة هي:

$P = \{ 2, 4, 6\}$ أي أن $m = 3$

إذن: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$

➢ **مثـــــال 2:**

يحتوي كيس على 10 كرات، 7 منها حمراء اللون. أحسب إحتمال الحصول على 4 كرات حمراء إذا سحبنا من الكيس 6 كرات.

إن إحتمال الحصول على 4 كرات حمراء من الكيس بعد سحب 6 كرات هو:

m: عدد الحالات الملائمة وهو سحب 6 من 10 أي:

$$C_{10}^{6} = \frac{10!}{(10-6)! \times 6!} = 210$$

n: عدد الحالات الملائمة وهو سحب 6 من 10 أي: $C_7^4 \times C_3^2 = 105$

إذن:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{105}{210} = 0.5$$

❖ **صيغة أخرى لتعريف الإحتمال:**

إن إحتمال تحقق الحدث A المرتبط بتجربة عشوائية ما هو نهاية التكرار النسبي للحدث A وذلك عندما تتكرر هذه التجربة في عدد كبير من المرات، أي أن:

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} \qquad (1.3)$$

3.1.1- خواص الإحتمال:

إذا كان A حدث ما، فإن:

- $0 \le P(A) \le 1$،
- إذا كان $\overline{A}$ حدث متمم لـــ A، فإن:

$p(A) + p(\overline{A}) = p(A \cup \overline{A}) = p(\Omega) = 1$،

ومنه: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

4.1.1- الخواص الأساسية في نظرية الإحتمال:

ا)- قاعدة الجمع للأحداث المتنافية:

إذا كان A و B حدثين متنافيين، فإن تحقق مجموعهما هو مجموع إحتمالهما، أي أن:

$$P(AUB) = P(A) + P(B) \qquad (1.4)$$

وبصفة عامة إذا كان لدينا مجموعة من الحوادث $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$

فإن:

$$P(A_1UA_2\ldots\ldots UA_n) = P(A_1) + P(A_2)\ldots\ldots + P(A_n)$$

أي أن:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (1.5)$$

➢ **مثـــــال:**

ترمـــى زهرة نرد مرة واحدة. ما هو إحتمـــال الحصول على الرقم 1 أو الرقم 2.

إن إحتمال الحصول على الرقم 1 هو: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6} =$

وإحتمال الحصول على الرقم 2 هو: $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6} =$

وعليه هو إحتمال الحصول على الرقم 1 أو الرقم 2 هو:

$$p(AUB) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

ب) – قاعدة الجمع للأحداث الغير المتنافية:

إذا كان A و B حدثين غير متنافيين، فإن تحقق مجموعهما هو مجموع إحتمالهما ولكن نستثني إحتمال وقوعهما معا في آن واحد، أي أن:

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B) \qquad (1.6)$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة على أكثر من حدثين، فلو كان لدينا ثلاثة حوادث A و B و C فإن:

$$P(A \bigcup B \bigcup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \bigcap B) - P(A \bigcap C) - P(B \bigcap C) + P(A \bigcap B \bigcap C)$$

ويمكن البرهنة على ذلك بسهولة، وذلك بفرض أن BUC هي مجموعة واحدة ولتكن D ومن ثم تطبيق القاعدة (1.6)، مع ملاحظة أن عملية U هي توزيعية بالنسبة لـــ $\bigcap$.

وبصفة عامة إذا كان لدينا أكثر من ثلاثة حوادث فإن صيغة الجمع للأحداث الغير المتنافية تأخذ الشكل التالي:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} Ai) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai) - \sum p(Aj \bigcap Ak) + \sum P(Ai \bigcap Aj \bigcap Ak) - \dots\dots\dots \qquad (1.7)$$
$$\dots\dots\dots\dots + (-1)^{n-1} P(A1 \bigcap A2 \dots \bigcap Ak)$$

ج)– قاعدة الضرب للأحداث المستقلة:

إن إحتمال وقوع الحدثين A و B في آن واحد، مع العلم أنهما مستقلين، هو حاصل ضرب إحتمال وقوع كل منهما، أي أن:

$$P(A \bigcap B) = P(A).P(B) \qquad (1.8)$$

وبصفة عامة، إذا كان لدينا أكثر من حدثين مستقلين مثنى مثنى، فإن القاعدة(1.7) تصبح على الشكل التالي:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (1.9)$$

➢ **تمـــــرين:**

يحتوي صندوق على 10 مصابيح كهربائية، 7 منها صالحة و3 غير صالحة. سحبنا عشوائيا من الصندوق مصباحين (سحب مع الإرجاع للمصباح الأول).

أحسب ما يلي:

- إحتمال المصباحين صالحين،
- إحتمال المصباحين غير صالحين،
- إحتمال الأول صالح و الثاني غير صالح.

➢ **الحـــــل:**

ا) - إحتمال المصباحـــين صالحين، يعني المصبـــاح الأول صالح A والثاني صالح B:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{49}{100} = 0.49$$

لأن: $P(A) = \frac{7}{10}$ و $P(B) = \frac{7}{10}$

ب)- إحتمال المصباحين غير صالحين، يعني الأول غير صالح C و الثاني غير صالح D:

$$P(C \cap D) = P(C) \times P(D) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100} = 0.09$$

ج)- إحتمال الأول صالح و الثاني غير صالح، يعني الأول صالح A و الثاني غير صالح C:

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{21}{100} = 0.21$$

د) – قاعدة الضرب للأحداث المرتبطة (الإحتمال الشرطي):

إن تحقق الحدث A يكون مرتبط بتحقق الحدث B بصورة مسبقة، أي أن تحقق A يشترط تحقق B. نسمي في هذه الحالة حساب وقوع A بشرط B بالإحتمال الشرطي و نكتب:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{بحيث} \quad P(B)\neq 0 \qquad (1.10)$$

أو

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \text{بحيث} \quad P(A)\neq 0 \qquad (1.11)$$

➢ **تمــــرين:**

نسبة الرسوب، حسب محاضر الامتحانات النهائية لمعهد ما، هو 15% في مقياس الإحصاء؛ وفي مقياس الرياضيات هو 25% ؛ وفي المقياسين معا هو 10%. أخذنا طالبا عشوائيا من المحاضر. إذا كان هذا الطالب راسبا في الرياضيات ما هو إحتمال أن يرسب في الإحصاء؟. إذا كان هذا الطالب راسبا في الإحصاء ما هو إحتمال أن يرسب في الرياضيات؟. ماهو إحتمال أن يرسب في الرياضيات أو في الإحصاء؟.

➢ **الحــــل:**

إحتمال أن يرسب في الرياضيات هو $P(A)=0.15$

إحتمال أن يرسب في الإحصاء هو $P(B)=0.25$

إحتمال أن يرسب في الرياضيات و الإحصاء معا هو

$$P(A\cap B)=0.10$$

- إحتمال أن يرسب في الإحصاء مع العلم أنه (أي بشرط) راسبا في الرياضيات هو:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.10}{0.15}$$

• إحتمال أن يرسب في الرياضيات مع العلم أنه راسبا في الإحصاء هو:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.10}{0.25}$$

• إحتمال أن يرسب في الرياضيات أو في الإحصاء هو:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.15+0.25-0.10=0.30$$

هـ) – نظرية بابيز:

تظهر نظرية بابيز كيفية حساب الإحتمالات الشرطية لحوادث متنافية تشكل مجموعة كلية و مرافقة لحدوث الحدث A.

لنفترض أنه لدينا مجموعة من الحوادث المتنافية $B_1, B_2, \ldots\ldots B_n$ مشكلة مجموعات جزئية من المجموعة الكليةΩ ؛ و لنفترض الحدث A و الذي يتحقق بشرط تحقق أحد الحوادث السابقة $B_1, B_2, \ldots\ldots B_n$.

نريد حساب الإحتمالات الشرطية $P(B_i/A)$ وذلك بمعلومية $P(Bi)$، أي بشرط تحقق $P(Bi)$، فيكون لدينا:
من جهة ثانية لدينا:

$$P(Bi/A)=\frac{P(A\cap Bi)}{P(A)}\Rightarrow P(A\cap Bi)=P(Bi/A)\times P(A).......2$$

وحيث أن الطرفين 1 و 2 متساويان، يكون لدينا:

$$P(A\cap B_i)=P(A)\times P(B_i/A)=P(Bi)\times P(A/B_i)$$

بالقسمة على $P(A)$ حيث $P(A)\neq 0$ نحصل على:

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\times P(A/B_i)}{P(A)} \qquad (*)$$

الحدث A لا يتحقق إلا بتحقق أحد هذه الحوادث، فإن:

$$P(A) = \sum P(B_i) \times P(A/B_i)$$

وبالتعويض في المعادلة (*) نجد:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i) \times P(A/B_i)}{\sum P(B_i) \times P(A/B_i)} \qquad (1.12)$$

وهي العلاقة النهائية لنظرية بايز.

➢ تمـــــرين:

تملك مؤسسة إنتاجية ثلاث آلات للإنتاج، بنسب إنتاج هي على التوالي: 60%، 30%، 10% من إجمالي إنتاج المؤسسة. فإذا كانت نسبة الإنتاج الصالح لهذه الآلات هي على التوالي: 98%، 97%، 96%. سحبنا بصورة عشوائية وحدةمن المؤسسة، ووجد بأنها فاسدة، فما هو إحتمال أن تكون هذه الوحدة من إنتاج الألة الثالثة.

➢ الحـــــل:

نسمي الآلات الثلاث على التوالي A، B و C وهي ثلاث مجموعات جزئية متنافية، إتحادهما يشكل المجموعة الكلية (المؤسسة) و نرمز للوحدة الفاسدة بالرمزX والتي تتحقق بتحقق إحدى المجموعات السابقة، و المطلوب هو إيجاد:

إحتمال أن تكون هذه الوحدة الفاسدة من إنتاج الألة C،و بتطبيق نظرية بايز نجد:

$$P(C/X) = \frac{P(C) \times P(X/C)}{P(A) \times P(X/A) + P(B) \times P(X/B) + P(C) \times P(X/C)}$$

بالتطبيق العددي نجد:

$$P(C/X) = \frac{0.10 \text{x} 0.04}{(0.6 \text{x} 0.02) + (0.30 \text{x} 0.03) + (0.10 \text{x} 0.04)} = 0.16$$

2.1- المتغيرات العشوائية و التوزيعات الإحتمالية:

1.2.1- المتغيرات العشوائية:

➢ **مثـــــال:**

ترمى زهرة نرد مرتين على التوالي. ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع العددين الظاهرين، أي:

$X(a,b) = a+b$. المطلوب شكل التوزيع الإحتمالي المناسب، ثم مثله بيانيا.

➢ **الحــــل:**

لنشكل فضاء العينة، أي كل الحالات الكلية الممكنة الناتجة عن هذه التجربة الإحتمالية:

Ω = {(1,1), (1.2),(1.3),(1.4), (1.5), (1.6), (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6), (6.1), (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6)}.

إن قيم X الموافقة للقانون $X(a,b) = a + b$ هي كما يلي:

$$X = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

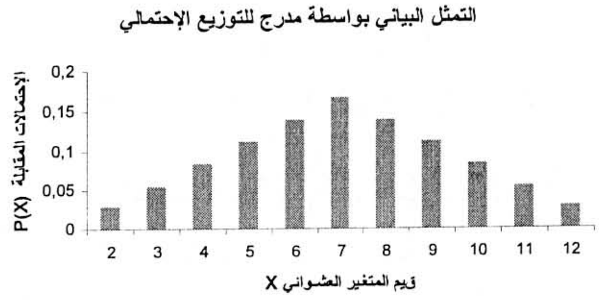
إن إحتمال أن يكون:

$$P(x = 2) = \frac{1}{36}$$

لأنه توجد حالة واحدة ممكنة يكون فيها مجموع العددين الظاهرين يساوي 2 وهي (1,1) من بين 36 حالة كلية. وبالمثل لباقي قيم X؛ فمثلا $P(x = 3) = \frac{2}{36}$ التي تقابل الحالتين (1.2) و(2.1)، و هكذا.....

قيم X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P (X)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

ويمكن بسهولة تمثيل هذا التوزيع بيانيا، فنحصل على مايلي:



نلاحظ أن هذا التوزيع متماثل حول نقطة هي 7.

من هذا المثال البسيط يمكن أن نصل إلى تعريف المتغير العشوائي. إن المتغير العشوائيX هو مجموعة قيم لنتائج تجربة إحتمالية ما، مقترن بإحتمالات مقابلة، فلكل قيمة لـــ Xi إحتمال مقابل P(Xi)، وهو ما يشكل توزيعا إحتماليا.

1.1.2.1- أنواع المتغيرات العشوائية:

و يمكن أن نميز: المتغير العشوائي المنفصل والمتغير العشوائي المتصل.

ا)- المتغير العشوائي المنفصل:

وهو المتغير العشوائي الذي يمكنه أخذ عددا منتهيا من القيم الصحيحة ضمن مجال تغيره، و يدعى في هذه الحالة بالمتغير العشوائي المنفصل ضمن فراغ عينة منته، مثل رمي حجر نرد مرة واحدة. أما المتغير العشوائي المنفصل ضمن فراغ عينة غير منته ولكنه قابل للعد، فهو العشوائي الذي يمكنه أخذ عددا غير منتهيا من القيم الصحيحة ضمن مجال تغيره ألا أن يكون هذا المجال قابلا للعد. مثال على ذلك عمليات السحب بالإعادة، حيث أن عدد مفردات السحب يبقى دائما ثابتا، وأن عملية سحب ما هي إلا متغير عشوائي مستقل عن العمليات الأخرى.

لنفرض أن X هو متغير عشوائي منفصل، و أن Ω هو فراغ عينته، فيكون لدينا:

$$\Omega = \{X1, X2, \ldots..Xn\}$$

وأن الإحتمالات المقابلة لقيم Xi هي P(X=Xi)، فإن التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

قيم X	X1	X2	....	Xn
P (X)	$P(X_1)$	$P(X_1)$	....	$P(X_n)$

إن هذا التوزيع يجب أن يحقق شرطين أساسين:

$$\begin{cases} P(X_i) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P(X_i) = 1 \end{cases} \quad (1.13)$$

➢ **مثـــــال:**

ترمى قطعة نقود مرتين على التوالي. نعرف المتغير العشوائي بأنه عدد مرات الحصول على الوجه F. و المطلوب شكل التوزيع الإحتمالي المناسب لهذه التربة الإحتمالية مع الرسم البياني.

➢ **الحـــــل:**

نرمز بـــ F للوجه الأول لقطعة النقود؛ وبالرمز P للوجه الأخر، فيكون فضاء العينة كما يلي:

$$\Omega = \{(F,F), (F.P),(P.F),(P.P)\}.$$

إن قيم X المقابلة هي كما يلي:

X = 0 عدم الحصول على الوجه F، أي الحصول على الوجه(P.P)

X = 1 الحصول على الوجه F مرة واحدة، أي (F.P),(P.F)

X = 2 الحصول على الوجه F مرتين، أي الحصول على الوجه,(F,F)

أي أن: $X = \{ 0, 1, 2,\}$

أما الإحتمالات المقابلة فهي:

$$P(x=2) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad P(x=1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(x=0) = \frac{1}{4}$$

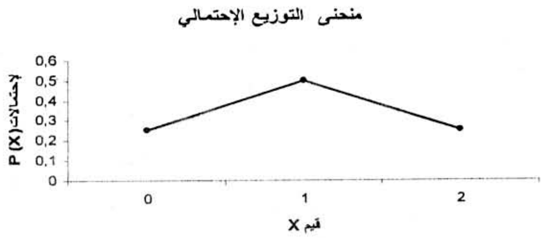
نلخص هذه النتائج في الجدول التالي:

قيم X	0	1	2	المجموع
P (X)	1/4	2/4	1/4	1

نلاحظ أن:

$$\begin{cases} P(X_i) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P(X_i) = 1 \end{cases}$$

أما التمثيل البياني لهذا التوزيع فهو كما يلي:



ب) المتغير لعشوائي المتصل:

كون X متغيرا عشوائيا متصلا، إذا كان بإمكان هذا المتغير أن يأحذ أية قيمة في مجال تغير X؛ إن إحتمال أن يأخذ X قيمة واحدة صحيحة يكون

معدوما في هذه الحالة (عكس المتغير العشوائي المنفصل). فمثلا أن طول شخص ما هو مغير عشوائي متصل، ذلك أن هذا الشخص يمكن أن يكون طوله 1.80، وبصورة أدق يمكن أن يكون 1.801 ويمكن أن يكون 1.8015 إذا إستعملنا وسائل قياس أدق وهكذا....، فاحتمال أن يكون طول هذا الشخص مساويا بالضبط 1.80 هو إحتمال معدوم.

إن قانون المتغير العشوائي المتصل يأخذ شكل الدالة المستمرة في مجال تعريفها، فتكون على الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

وتسمى الدالة $f(x)$ بدالة الكثافة الإحتمالية، عندما تعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا: $f(x)$ وتسمى الدالة $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية. ولكي يمكن اعتبار دالة ما، أيا كانت، دالة كثافة احتمالية يجب أن يتحقق شرطان اثنان:

$$1)\qquad f(x) \geq 0$$
$$2)\qquad \sum_x f(x) = 1$$

وذلك في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة.

أما في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة فهي مجموعة القيم اللامتناهية، في مجال محدود، التي يمكن أن يأخذها المتغير X والاحتمالات الملحقة بها. ولكي تكون $f(x)$ دالة كثافة إحتمالية، يجب تحقق الشرطين:

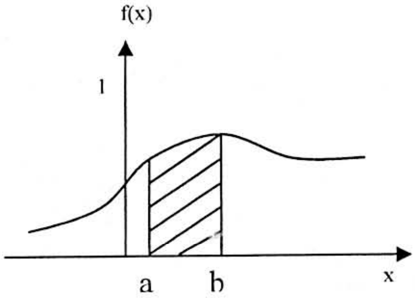
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_b^a f(x)dx = 1 \end{cases} \qquad (1.14)$$

وهي ممثلة بمنحنى متصل.

لاحظ أنه بما أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها يكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال.

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (1.15)$$

لاحظ أن إشارة التكامل هنا تقابل إشارة المجموع في حالة المتغير العشوائي المتقطع.



التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المستمرة

- **مثال لحالة المتغيرات العشوائية المتقطعة**

نأخذ دالة الكثافة ل X نتيجة لإلقاء حجر نرد:

$f(1) = f(2) = f(3) = \dots f(6) = 1/6 \geq 0$, الشـــرط الأول محقـــق

والشرط الثاني أيضا لأن:

$$\Sigma f(x) = 1/6 + 1/6 + \dots + 1/6 = 6(1/6) = 1$$

➢ **مثال لحالة المتغيرات العشوائية المستمرة**

ليكن X متغيرا عشوائيا متصلا معرفا بالدالة الإحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} KX & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

- أوجد قيمة K حتى تكون f(x) دالة كثافة إحتمالية،
- أوجد $P(1 \leq x \leq 2)$،
- مثل بيانيا هذه الدالة.

➢ **الحــــــل:**

حتى تكون f (x) دالة كثافة إحتمالية يجب أن يكون:

$$\int_1^3 f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_1^3 kxdx = 1 \Rightarrow k\int_1^3 xdx = 1$$

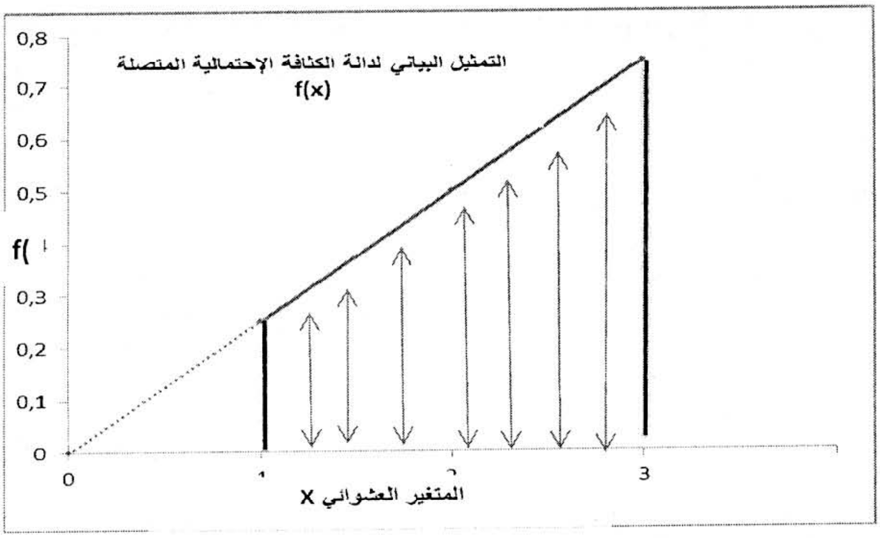
$$k\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = k\left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

وتكون الدالة على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4X & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

ويمكن بسهولة إيجاد:

$$P(1 \leq x \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{4}xdx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{8} = 0.375$$



ملاحظة هامة:

يمكن إيجاد $P\ (1 \leq X \leq 2)$ هندسيا وذلك بحساب مساحة شبه المنحرف وفق العلاقة: $\frac{AxB}{2} xh$

أي أن: $$P(1 \leq x \leq 2 = \frac{0.5+0.25}{2} x1 = 0.375$$

- **دالة التوزيع F(x) للمتغيرة العشوائية المتقطعة**

تعرف دالة التوزيع – وتسمى أيضا "الدالة التجميعية" — كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية $f(X)$ كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

إذا كانت X تأخذ عددا منتهيا من القيم فإن F(x) يمكن تعريفها كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & , \quad x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1)+f(x_2) & , \quad x_2 \le x < x_3 \\ \cdots & \\ f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n), & \quad x_n \le x < +\infty \end{cases}$$

➢ تمــــرين

في تجربة رمي قطعة نقدية مرتين نعتبر المتغير العشوائي X التي تمثل عدد مرات الحصول على كتابة. إن القيم الممكنة ل X هي 0، 1، 2. في نفس التجربة نعرق المتغير العشوائي Y الذي يمثل عدد مرات الحصول على صورة، فتكون القيم الممكنة 0، 1، 2، ونعرف المتغير Z بحث Z = X - Y فتكون القيم الممكنة له هي 0، 2، -2. الاحتمالات الملحقة بقيمها يمكن حسابها كما يلي:

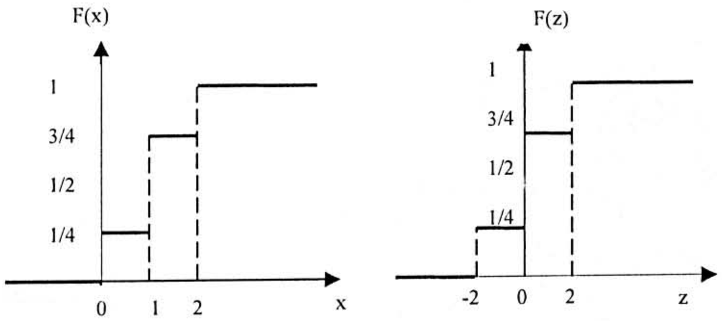
P(Z = 0) = P(X – Y = 0) = P(X = 0 et Y = 0 ou X = 1 et Y = 1 ou X = 2 et Y = 2) =>P (Z = 0) = 0 + P(X = 1 et Y = 1) + 0 = 2 * 0.5^2 = **0.5**

ويمكن إيجاد قيم F(x) وF(z) للمتغيرين X و Z كما في الجدولين:

X	0	1	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1

Z	-2	0	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1

التمثيل البياني لدالة التوزيع للمتغيرة العشوائية



- **دالة التوزيع F(x) للمتغير العشوائي المستمر**

تعرف دالة التوزيع للمتغير المستمر كما يلي:

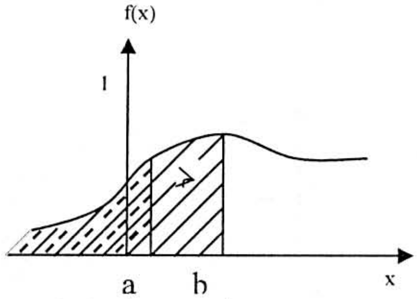
تسمى F(X) دالة التوزيع للمتغير المستمر X إذا كان:

(1.16)

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

ولحساب احتمال جال من الجهة اليسرى، فإننا نقوم بالتعويض في دالة التوزيع بدلا من حساب التكامل وفق القاعدة التالية: بفرض a, b نقطتان من مجال تعريف X، بحيث b > a. لحساب احتمال أن تكون X تنتمي إلى المجال :]a, b]

$$P(a < x \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$$



حساب الاحتمال من خلال دالة التوزيع

➢ **مثـــــال:**

أوجد قيمة الثابت C التي تحقق الشرطين الأول والثـــاني لدالـــة الكثافـــة الاحتمالية في الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

✓ أحسب احتمال أن تكون X تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

✓ أحسب احتمال أن تكون X لا تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

✓ استخدم دالة التوزيع لحساب الاحتمال: P(1< x <2).

الحـــــل:

- إيجاد قيمة الثابت C

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 => \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} Cx^2dx + \int_{3}^{+\infty} 0dx = 1 => C\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9C = 1 => C = 1/9$$

حتى تكون f(x) دالة كثافة يجب أن يكون C = 1/9.

➢ احتمال أن تكون x تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

$$P(1 < x \leq 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (1/9)x^2 dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{8-1}{3}\right] = \frac{7}{27}$$

➢ احتمال أن تكون x لا تنتمي للمجال من 1 إلى 2

$$P(1 > x > 2) = 1 - P(1 < x < 2) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

➢ **دالة التوزيع:**

$$* x < 0: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du = 0$$

$$* x \geq 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_0^3 \frac{1}{9}u^2 du + \int_3^x 0du = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3 + 0 = \frac{27}{27} = 1$$

$$* 0 \leq x < 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_0^x \frac{1}{9}u^2 du = \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

فتكون الصيغة النهائية لدالة التوزيع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3/27 & 0 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

➢ حساب الاحتمال: P(1< x <2) باستعمال دالة التوزيع:

$$P(1 < x \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{7}{27}$$

3.1– التوقع الرياضي:

إن التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) لأي توزيع إحتمالي معين هو عبارة عن متوسط حسابي لهذا التوزيع، و يرمز له بالرمز: E(X).

أ) – حالة التوزيع الإحتمالي المنفصل:

ويعطى بالعلاقة التالية:

$E(X)=\dfrac{\sum Xp(X)}{\sum P(X)}$ و حيث أن: $\sum P(X)=1$ ، فإن:

$$E(X)=\sum XP(X) \qquad (1.17)$$

➢ **مثـــــال:**

تنتج شركة معينة 20 قطعة في اليوم من منتوج معين، من بينهما قطعتان فاسدتان. قمنا بسحب 4 قطع من هذا المنتوج بطريقة عشوائية. أوجد القيمة المتوقعة لعدد القطع الفاسدة.

➢ **الحـــــل:**

إن قيم X الممكنة هي: $X=\{0,1,2\}$ ، أي لا توجد قطعة فاسدة أو توجد قطعة فاسدة واحدة أو توجد قطعتان فاسدتان.

إن عدد الحالات الكلية هو: $C_{20}^{4}=4845$ ؛ أما الإحتمالات المقابلة لـــ X فهي:

$$P(X=0)=\frac{C_2^0C_{18}^4}{C_{20}^4}=0.63$$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1C_{18}^3}{C_{20}^4}=0.33$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2C_{18}^2}{C_{20}^4}=0.031$$

نتحصل على التوزيع التالي:

قيم X	0	1	2	المجموع
P (X)	0.63	0.33	0.031	1
XP(X)	0	0.33	0.062	0.392 = 0.4

وعليه فإن التوقع الرياضي لهذه العملية هي 0.4، أي أننا نتوقع الحصول على 0.4 قطعة فاسدة (قيمة لـــ X) من بين 20 قطعة المنتجة.

ب) – حالة التوزيع الإحتمالي المتصل:

تعطى عبارة التوقع الرياضي بالعلاقة التالية:

$$E(x) = \int_R xf(x)dx \qquad (1.18)$$

➢ **مثـــــال**

يمكننا بسهولة إيجاد الأمل الرياضي للتوزيع الإحتمالي المتصل الوارد في المثال السابق وهو:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4X & 1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

➢ **الحـــــل:**

$$E(x) = \int_R xf(x)dx = \int_1^3 \frac{1}{4}x^2dx = \frac{1}{4}\int_1^3 x^2dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{26}{12} = 2.16$$

ج)- خواص التوقع الرياضي:

- إذا كان X متغيرا عشوائيا غير سالب فإن: $E(X) \geq 0$،
- $E(C) = C$، حيث $C \in R$،
- $E(C.X) = C\,E(X)$،
- $E(X.Y) = E(X).E(Y)$، إذا كانت المتغيران X و Y مستقلتان
- إذا كان X وY متغيـــران عشوائيـــان معرفين على نفس فضاء العينة، فإن: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

➢ **مثـــــال:**

يمكن لأحدى الشركات التجارية أن تربح 300.000 دولار باحتمال قدره 0.60، كما يمكنها أن تخسر 100.000 دولار باحتمال قدره 0.40. المطلوب: كم تتوقع الشركة أن تربح في المتوسط؟.

➢ **الحـــــل:**

نلاحظ وجود متغيرين هما الربح X و الخسارة Y، و لكل منهما إحتماله المعلوم. إن التوقع المشتركة لهذه العملية هي:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 300.000\text{x}0.60 + (-100.000\text{x}0.40) = 140.000\ \$$$

أي أن الشركة تتوقع أن تربح 140.000 دولار (لاحظ إشارة السالب التي تعني الخسارة).

4.1- التباين:

أ) – حالة التوزيع الإحتمالي المنفصل:

ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum (X - E(X))^2.P(X) \qquad (1.19)$$

وبعبارة أخرى، يمكن أن نكتب:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum x^2.P(x) - [E(x)]^2$$

ب) – حالة التوزيع الإحتمالي المتصل:

$$Var(X) = \int_R (X - E(X))^2 f(x)dx \qquad (1.20)$$

أو نكتب:

$$Var(X) = \int_R x^2.P(x).dx - [E(x)]^2$$

➢ **تمـــــرين:**

يصوب رامي على هدف 03 طلقات، فإذا كان إحتمال إصابة الهدف هو0.40. نعرف X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد إصابات الهدف. المطلوب إيجاد التوقع الرياضي و التباين لهذه التجربة الإحتمالية.

➢ **الحـــــل:**

إن قيم X الممكنة هي:

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

أما الإحتمالات الممكنة فهي كما يلي:

$$P(X = 0) = 0.6x0.6x0.6 = 0.216$$
$$P(X = 1) = 0.6x0.6x0.4 = 0.432$$
$$P(X = 2) = 0.6x0.4x0.4 = 0.288$$
$$P(X = 3) = 0.4x0.4x0.4 = 0.064$$

نلخص هذا في الجدول التالي:

قيم X	0	1	2	3	المجموع
P (X)	0.216	0.432	0.288	0.064	1

التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum XP(X) = 0x0.216 + 1x0.432 + 2x0.288 + 3x0.064 = 1.2$$

التباين:

$$Var(X)=\sum(X-E(X))^2.P(X)=[\ (0-1.2)^2x0.216+$$
$$(1-1.2)^2x0.432+(2-1.2)^2x0.288+(3-1.2)^2x0.064\ ]=0.72$$

5.1-التوزيعات الإحتمالية الشهيرة:

هناك العديد من التوزيعات الاحتمالية التي تخضع إلى قوانين معينة ثابتة، نسبت في الغالب إلى واضعيها كتوزيع ذو الحدين الذي ينسب إلى العالم برنولي؛ ولكل هذه التوزيعات إستعمالاتها خاصة عند إجراء التجارب العلمية، إذ تستعمل في إختبار نجاح هذه التجارب، كما تساعد في إتخاذ القرار. نكتفي بدراسة بعض التوزيعات الشهيرة المستعملة أساسا في المجال الاقتصادي وكذلك تلك التي تستعمل في تجارب العلوم الطبيعية، وهي:

1.5.1- توزيع ذو الحدين:

وهو أحد التوزيعات الإحتمالية المنفصلة؛ فإذا كان لدينا في تجربة إحتمالية مستقلة ناتجين، نفرض أن P هي إحتمالات النجاح، فيكون q هي إحتمالات الفشل بحيث: $p+q=1$. إن إحتمال أن وقوع X من النجاحات في n من المحاولات المتكررة هو:

$$P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}=\frac{n!}{(n-x)!\,x!}p^x q^{n-x} \qquad (1.21)$$

ونرمز لهذا الإقتران الإحتمالي بالرمز: b (x,n,p)

➢ **مثـــــال:**

ترمى قطعة نقود 6 مرات. أوجد إحتمال الحصول على:

- الوجه F مرتين بالضبط
- الحصول 4 مرات على الوجه F على الأقل
- عدم الحصول على الوجه F.

➢ الحـــــل:

لدينا في قطعة النقود: $p = q = 0.5$، فإذا كانت $n = 6$ فإن:

– إحتمال الحصول على الوجه F مرتين بالضبط:

$$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} \Rightarrow P(X = 2) = C_6^2 0.5^2 0.5^{6-2} = 0.234$$

– الحصول 4 مرات على الوجه F على الأقل:

$$P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$
$$= C_6^4 .0.5^4 .0.5^{6-4} + C_6^5 0.5^5 .0.5^{6-5} + C_6^6 0.5^6 .0.5^{6-6} = 0.343$$

– عدم الحصول على الوجه F.

$$P(X = 0) = C_6^0 0.5^0 0.5^6 = 0.5^6 = 0.0156$$

1.1.5.1– خواص توزيع ذو الحدين:

- **التوقع الرياضي:**

$$\mu = np \qquad (1.22)$$

- **التباين:**

$$\sigma^2 = npq \qquad (1.23)$$

- **الإنحراف المعياري:**

$$\sigma = \sqrt{npq} \qquad (1.24)$$

➢ **تمـــــرين:**

ألقي حجر نرد 180 مرة. ما هو توقع عدد مرات الحصول على الرقم 6 و ما هو الإنحراف المعياري عندئذ؟.

➢ الحـــــل:

$$\mu = np = 180x1/6=30$$

أي أننا نتوقع 30 مرة الحصول على الرقم 6، بإنحراف معياري:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{180x1/6x5/6} = 5$$

2.5.1- توزيع بواسون:

وهو أحد التوزيعات الإحتمالية المنفصلة، وهو توزيع لا نهائي قابل للعد، له إستعمالات في الظواهر المتعلقة بالزمن، مثل حساب إحتمالات عدد

السيارات التي تمر خلال دقيقة في منطقة ما؛ أو حساب عدد الجسيمات أشعة ألفا التي يطلقها مركب مشع خلال وحدة زمنية...

ولإيجاد إحتمالات المتغير العشوائي X المقابلة لهذا التوزيع، فإننا نستخدم العلاقة التالية:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!} \qquad (1.25)\,, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

حيث أن λ ثابت أكبر من الصفر يمثل متوسط عدد الأحداث؛ e أساس اللوغارتم النيبري و يساوي 2.71.

1.2.5.1- خواص توزيع بواسون:

- **التوقع الرياضي:**

$$\mu = \lambda \qquad (1.26)$$

- **التباين:**

$$\sigma^2 = \lambda \qquad (1.27)$$

- **الإنحراف المعياري:**

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \qquad (1.28)$$

➢ **مثـــــال:**

يتلقى قسم الشرطة متوسط 5 مكالمات في الساعة. أوجد إحتمال تلقي مكالمتين في ساعة مختارة عشوائيا.

➢ **الحـــــل:**

$$P(X = x) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!} = \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = 0.08$$

2.2.5.1- تقريب توزيع ذو الحدين من توزيع بواسون:

في كثير من الحالات تكون قيمة n كبيرة جدا في توزيع ذو الحدين، وتكون قيمة p (إحتمالات النجاح) صغيرة جدا؛ فيصبح صعبا إجراء الحسابات

(مثلا حســـاب n !). يمكننا إجراء تقريب ذو الحديـــن لتوزيع بواســـون بحيث أن: $\lambda = np$.

> ➢ **مثـــــال:**

لنفترض أن $n = 100$ و $p = 0.01$، فيكون $\lambda = np = 1$. نتحصل على الجدول المقارن التالي:

x	0	1	2	3	4	5
إحتمالات ذو الحدين	0.366	0.370	0.185	0.0610	0.0149	0.0029
إحتمالات بواسون	0.368	0.368	0.184	0.0613	0.0153	0.00307

يظهر جليا بعد مقارنة إحتمالات التوزيعين، مدى التقارب الشديد بينهما.

➢ **مثـــــال 2:**

يحتوي كتاب على 500 صفحة، بفرض أن هناك 300 خطأ مطبعيا، فأوجد إحتمال أن تحتوي صفحة معينة على:

ا) – خطأين بالضبط،   ب)- خطأين أو أكثر

➢ **الحـــــل:**

إن هذه التجربة الإحتمالية تتبع توزيع ذو الحدين مع: $n = 300$ $p = 1/500$ وحيث أن قيمة n كبيرة و p صغيرة، فإننا نستخدم توزيع بواسون كتقريب لذو الحدين مع $\lambda = np = 0.6$.

أ) – إحتمال الحصول على خطأين بالضبط:

$$P(X = 2) = \frac{0,6^2 e^{-0,6}}{2!} = 0.098$$

ب) — إحتمال الحصول على خطأين أو أكثر: يعني صفر خطأ أو خطأ واحد أو خطأين:

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{0{,}6^0 e^{-0{,}6}}{0!}+\frac{0{,}6^1 e^{-0{,}6}}{1!}+\frac{0{,}6^2 e^{-0{,}6}}{2!}$$

$$=0.549+0.329+0.098=0.976$$

3.5.1- التوزيع الطبيعي:

أحد و أهم التوزيعات الإحتمالية المتصلة، نظرا لإستعمالاته المتعددة في شتى الميادين. تعطى دالة كثافته الإحتمالية بالعلاقة التالية:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2} \quad (1.29)$$

حيث: μ و $\sigma > 0$ هما ثابتان. إن منحنى هذه الدالة يأخذ الشكل الجرسي، متماثل حول نقطة مركزية هي μ، بحيث أن المساحة تحت المنحنى تساوي 1. نرمز للتوزيع الطبيعي الذي وسطه μ و تباينه σ^2 بـ $N(\mu,\sigma^2)$.

1.3.5.1– خواص التوزيع الطبيعي:

- **التوقع الرياضي:** μ
- **التباين:** σ^2
- **الإنحراف المعياري:** σ

2.3.5.1- التوزيع الطبيعي القياسي:

إن حساب إحتمال $P(x1<X<x2)$ يتطلب حساب التكامل المحدود للدالة المعطاة في (1.29). إن حساب هذا التكامل يتطلب الكثير من الحسابات؛ ولذلك ظهر التوزيع الطبيعي القياسي الذي يعتمد في حساب هذا التكامل على إستعمال جدول خاص يمكن من حساب أي مساحة من خلال قراءة مباشرة في الجدول دون اللجوء إلى حساب هذا التكامل. ويمكن الإنتقال من التوزيع

الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ إلى التوزيع الطبيعي القياسي الذي وسطه 0 و تباينه 1 أي $N(0.1)$ بالعلاقة التالية :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad (1.30)$$

عندئذ تصبح الدالة f(x) كما يلي:

$$\Psi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \qquad (1.31)$$

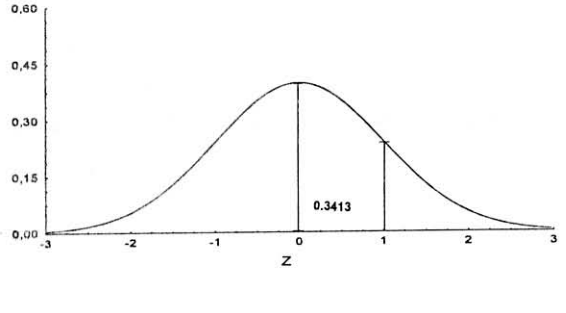
يعطينا جدول التوزيع الطبيعي القياسي (أنظر الملحق، جدول 3) المساحة الواقعة تحت المنحنى بين $Z = 0$ وأي قيمة موجبة أخرى Z، كما يمكننا الإستفادة من خاصية التماثل (التناظر) في هذا التوزيع من تحويل وحدات Z السالبة إلى وحدات موجبة.

➢ **مثال1:**

-أحسب إحتمال $P(0<Z<1)$:

إن هذا الإحتمال يقابل المساحة المحصورة بين 0 و 1.00 في الجدول 3. نأخذ العمود من أعلى إلى أسفل و نتوقف عند القيمة 1.0، الرقم الثاني وراء الفاصل يقرأ في سطر الجدول عند 0 فنجد المساحة: 0.3413 عند إلتقاء القراءتين.

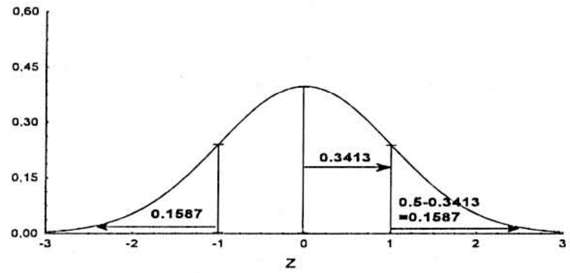
$$P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$$



مثـــــال2:

أحسب إحتمال $P(Z\geq1)$:

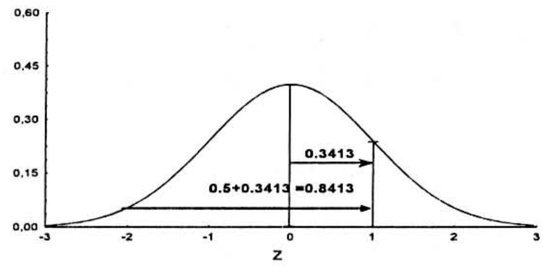
$$P(Z\geq1) = 0.5 - (0\leq Z \leq1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$



مثـــــال 3:

أحسب إحتمال $P(Z\leq1)$:

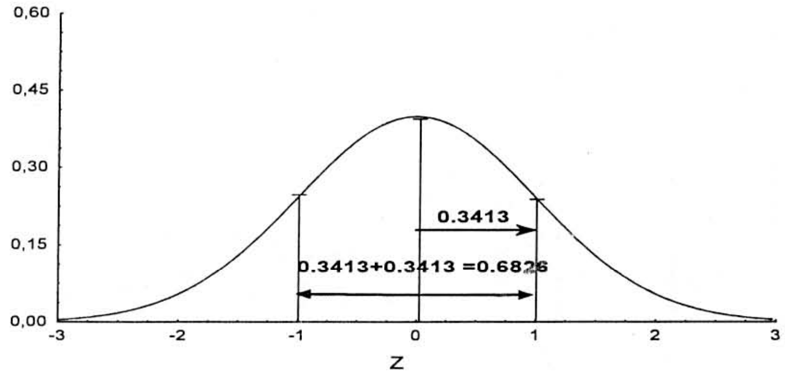
$$P(Z\leq1) = 0.5 + P(0\leq Z \leq1) = 0.5 + 0.3413 = 0.8413$$



مثـــــال 4:

أحسب إحتمال $P(-1\leq Z \leq1)$:

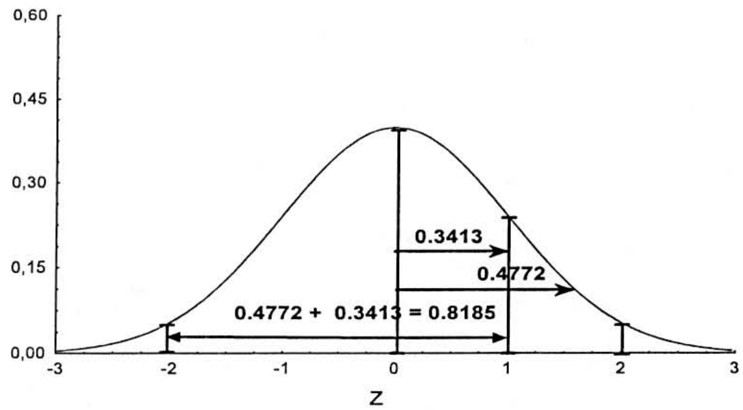
$$P(-1\leq Z \leq1) = 2\,P(0\leq Z \leq1) = 2 \times 0.3413 = 0.6826$$



مثـــال 5:

أحسب إحتمال $P(-2\leq Z \leq 1)$:

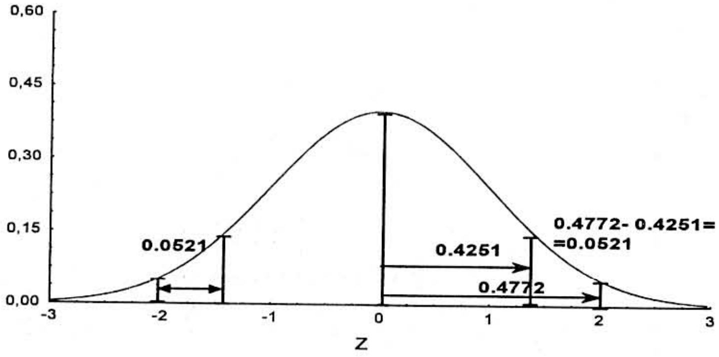
$$P(-2\leq Z \leq 1)= P(0\leq Z \leq 2) + P(0\leq Z \leq 1) =$$
$$= 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$$



مثـــال 6:

أحسب إحتمال $P(-2\leq Z \leq -1.44)$:

$$P(-2\leq Z \leq 1)= P(0\leq Z \leq 2) - P(0\leq Z \leq 1.44) =$$
$$0.4772 - 0.4251= 0.0521$$

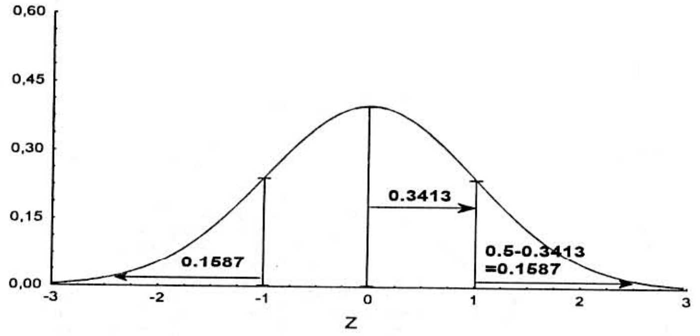


➢ مثـــال7:

أحسب إحتمال $P(Z\leq -1)$:

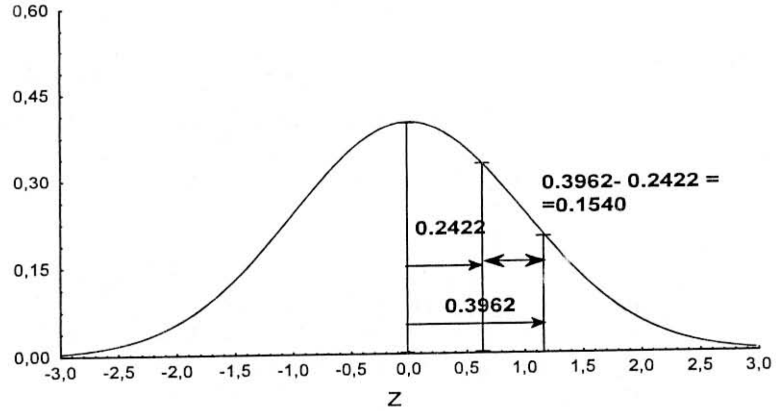
$$P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$



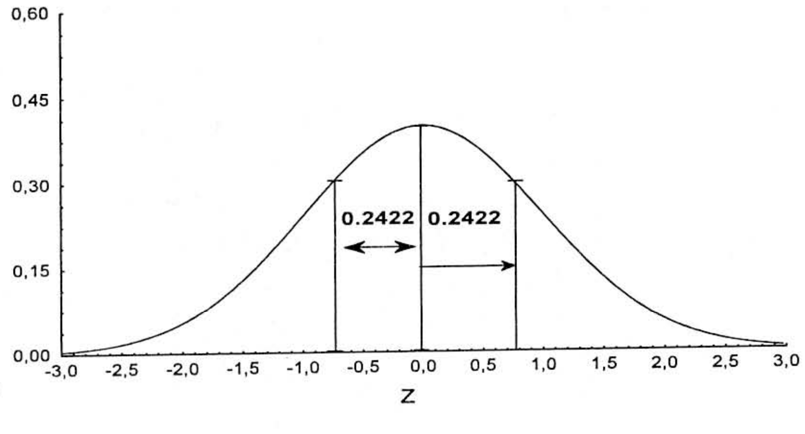
➢ مثـــال 8:

$$P(0.65 \leq Z \leq 1.26) = P(0 \leq Z \leq 1.26) - P(0 \leq Z \leq 0.65) =$$
$$= 0.3962 - 0.2422 = 0.1540$$



➢ **مثـــــال 9:**

P(-0.65≤ Z ≤0) =P(0≤ Z ≤0.65)= 0.2422



➢ **مثـــــال 10:**

إذا كانت درجة الحرارة تخضع للتوزيع الطبيعي بتوقع 20 دم و إنحراف معياري 3.33 دم. أوجد إحتمال أن تتراوح درجة الحرارة بين 21.11 دم و26.66 دم.

➢ الحـــــل:

في هذه الحالة يجب تحويل وحدات التوزيع الطبيعي (N(20,3.33 إلى وحدات التوزيع الطبيعي القياسي (N(0,1 وفق العلاقة:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

أي أن:

$$P(21.11 \le X \le 26.66) = P(\frac{21.11-20}{3.33} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{26.33-20}{3.33}) =$$
$$P(0.33 \le Z \le 2) = P(0 \le Z \le 2) - P(0 \le Z \le 0.33)$$
$$= 0.4772 - 0.1293 = 0.3479$$

3.3.5.1- التقريب الطبيعي لتوزيع ذو الحدين:

إذا كان X متغيرا عشوائيا يخضع لتوزيع ذو الحدين b (X,n,p)، فإن إحتمالات ذو الحدين تقترب من إحتمالات التوزيع ذو الحدين، عندما تكون n كبيرة، حيث:

$$\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \rightarrow N(0,1) \qquad (1.32)$$

وذلك حسب الخواص التالية:

- إذا كان k عددا صحيحا موجبا بين 0 و n فإن:

$$P(X=k) = P(k-½ \le X \le k+½) =$$
$$\frac{k-1/2-np}{\sqrt{npq}} \le Z \le \frac{k+1/2-np}{\sqrt{npq}} \qquad (1.33)$$

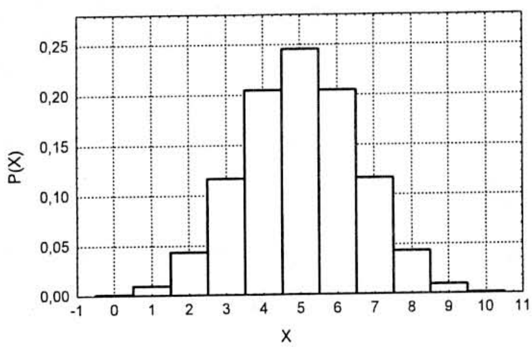
- إذا كان a و b أعدادا صحيحة موجبة بين 0 و n فإن:

(1.32)

$$P(a \le X \le b) = \frac{a-1/2-np}{\sqrt{npq}} \le Z \le \frac{b+1/2-np}{\sqrt{npq}}$$

➢ **مثـــــال:**

نرسم المدرج الإحتمالي لتوزيع ذو الحدين التالي: b (X,10,0.5)، حيث: X=0,1,2,........10، مع:



P(X=0) = 0.0010
P(X=1) = 0.0980
P(X=2) = 0.0439
P(X=3) = 0.1172
P(X=4) = 0.2051
P(X=5) = 0.2460
P(X=6) = 0.2050
P(X=7) = 0.1170
P(X=8) = 0.0430
P(X=9) = 0.0980
P(X=10) = 0.001

لنأخذ مثلا المستطيل رقم 5، نلاحظ أن عرضه يساوي 1.0 = 4.5 – 5.5، أما طوله فهو 0.246، وعليه تكون مساحته هي 0.246 (الطول في العرض)؛ وهكذا لباقي المستطيلات.

لنحسب هذه المساحات بالتوزيع الطبيعي وفق أحد القواعد السابقة، ولنأخذ مثلا المستطيل رقم 5.

لدينا: $\mu = np = 10 \text{ x } 0.5 =$ و $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10\text{x}0.5\text{x}05} = \sqrt{2.5}$

فيكون:

$$P(x=5) = P\left(\frac{4.5-5}{\sqrt{2.5}} \le Z \le \frac{5.5-5}{\sqrt{2.5}}\right) = P(-0.316 \le Z \le 0.316) =$$
$$= 2\text{x}0.1217 = 0.2434$$

من خلال المقارنة بين النتيجتين، يظهر جليا إمكانية إجراء هذا التقارب.

➢ تمـــــرين:

لنفرض أنه لدينا 300 سؤال، لكل سؤال 4 أجوبة، واحدة فقط صحيحة. أوجد إحتمال أن يحصل طالب على 78 إجابة صحيحة. أوجد إحتمال أن يحصل الطالب على 72 و 100 إجابة صحيحة.

➢ الحــــــل:

لدينا X عدد الإجابات الصحيحة، $n= 300$ و $p = ¼$.

$$\mu = np = 75$$
$$\sigma = 7.5$$

لنحسب هذا الإحتمال باستعمال ذو الحدين، فنحصل على:

$$b(78,30,\tfrac{1}{4}) = C_{300}^{78}(\tfrac{1}{4})^{78}(\tfrac{3}{4})^{222} = \ldots.$$

إن حساب هذا الإحتمال يتطلب الكثير من الحسابات، و حيث أن n كبيرة فإنه يمكن تقريب ذو الحدين بالطبيعي:

$$P(x = 78) = P(\frac{77.5 - 75}{7.5} \leq Z \leq \frac{78.5 - 75}{7.5})$$
$$= P(0.333 \leq Z \leq 0.467) = 0.051$$

ب)- إحتمال أن يحصل الطالب على 72 و 100 إجابة صحيحة:

$$P(72 \leq x100) = P(\frac{71.5 - 75}{7.5} \leq Z \leq \frac{100.5 - 75}{7.5}) = 0.680$$

4.5.1- توزيع ستونت (t):

أحد التوزيعات الإحتمالية المتصلة، يشبه كثيرا التوزيع الطبيعي، تكمن تطبيقاته في نظرية العينات وإختبار الفرضيات كبديل للتوزيع الطبيعي عندما يكون حجم العينة صغيرا.

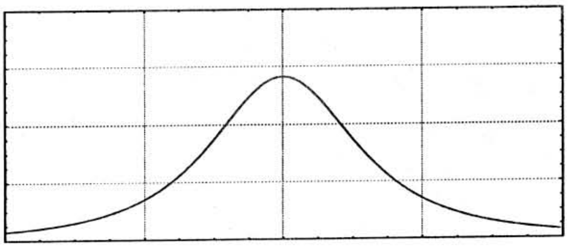
دالة كثافته الإحتمالية تعطى بالعلاقة التالية:

$$f(t) = c(1+\frac{t^2}{\nu})^{-(\nu+2)/2} \quad (1.34)$$

حيث: c: ثابت مرتبط بـــ ν

ν*: درجات الحرية و $-\infty < t < +\infty$

نرمز لتوزيع t بالرمز $t(\rho,\nu)$.



تحسب إحتمالات توزيع t من خلال الجدول (أنظر الملحق، جدول 4)، حيث تسجل درجات الحرية في العمود الأيسر، أما في الأعلى فتقرأ المساحات (الإحتمالات) وفي داخل الجدول تقرأ قيم t المقابلة.

➢ **مثـــــال:**

ما هي قيمة المساحة التي تقابل حجم العينة 11 و $t = 2.812$.

➢ **الجــــواب:**

لدينا $\nu = n-1$، أي أن $\nu = 10$ و $t = 2.812$ فإن المساحة المقابلة هي 0.95.

إن توزيع t هو توزيع متماثل، حيث أن:

$\mu = 0$ حيث $\nu > 2$

$$\sigma^2 = \frac{\nu}{\nu-2} \quad (1.35)$$

* درجات الحرية تعرف بأنها العدد n من المشاهدات المستقلة في العينة ناقص العدد k لمعالم المجتمع (الوسط الحسابي و الإنحراف المعياري أي أن:. $\nu = n-k$ في حالة توزيع t فإن $\nu = n-1$ على أساس أنه يجب معرفة المتوسط الحسابي لهذا التوزيع والذي يساوي الصفر، و بالتالي يكون عدد المعالم المقدرة هو 1.

وبالتالي أمكن الإستفادة من هذه الخاصية في حساب المساحات الصغيرة (و الغير موجودة في الجدول أحيانا)، و ذلك بتطبيق العلاقة التالية:

$$t_{1-p} = -t_p \qquad (1.36)$$

فمثلا، يمكن الكتابة:

$$t_{0.05} = -t_{0.95}$$

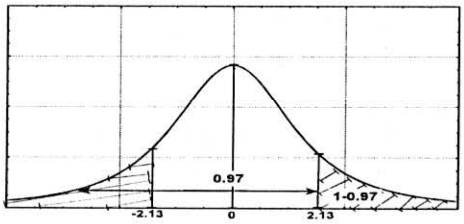
➢ **مثـــــال:**

بإستعمال توزيع ستودنت، أوجد المساحة الواقعة على يسار $t = -2.13$ وعند درجات حرية 15.

لدينا:

$t_{1-p} = -t_p$، وحيث أن قيمة t سالبـــة فإننا نستخـــدم خاصيـــة التناظر (لا توجد قيم سالبة في جدول t) أي:

$$t(p,15) = -t(1-p,15)$$



إن قيمة $t = -2.13$ تقابلها $t = 2.13$ ومساحتها 0.97 وحيث أن المساحة المطلوبة هي على يسار 2.13-، فيكون:

$1-p = 0.97$ من الجدول، ومنه $p = 1-0.97 = 0.03$، أي أن المساحة الواقعة على يسار $t = -2.13$ و عند درجات حرية 15 هي 0.03.

➢ **مثـــال2:**

أوجد قيمة p بحيث يكون: $t(p,15) = -2.60$.

➢ الحـــــل:

بالتماثل نجد: $t(\rho,15) = -t(1-\rho,15)$ ، أي أن: $-t(1-\rho,15) = -2.60$

ومن الجدول: $1 - p = 0.99$ هذا يعني أن: $p = 0.01$.

➢ مثـــــال3:

أوجد قيمة t التي تقابل $p = 0.05$ و $v = 5$.

➢ الحـــــل:

حيث أن قيمة المساحة صغيرة جدا، يمكن تطبيق الخاصية التالية:

$$t(0.05,15) = -t(1 - 0.05,15)$$

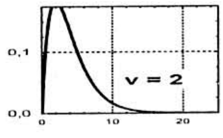
$$t(0.05,15) = -t(0.95,15) = -2.015$$

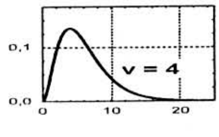
5.5.1– توزيع كاي مربع χ^2 (khi deux) :

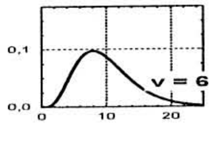
توزيع إحتمالي متصل، له إستعمالات متعددة خاصة في إختبارات الإرتباط و الإستقلال و التوفيق؛ و هو معرف بمتغيره العشوائي χ^2. دالة كثافته الإحتمالية تعطى بالعلاقة التالية:

$$f(\chi^2) = c(\chi^2)^{(v-2)/2} e^{-\chi^2/2} \quad , \chi^2 > 0 \qquad (1.37)$$

حيث أن c ثابـــت يعتمد على v ليجعل المساحة تحت المنحني تســـاوي 1 و $v = n - 1$.







ولإيجاد إحتمالات الـــ χ^2، فإننا نستخدم الجدول الخاص بهذا التوزيع (أنظر الملحق، جدول 5)، حيث نجد أفقيا المساحات المقابلة، عموديا درجات الحرية وفي داخل الجدول تقرأ قيم الـــ χ^2.

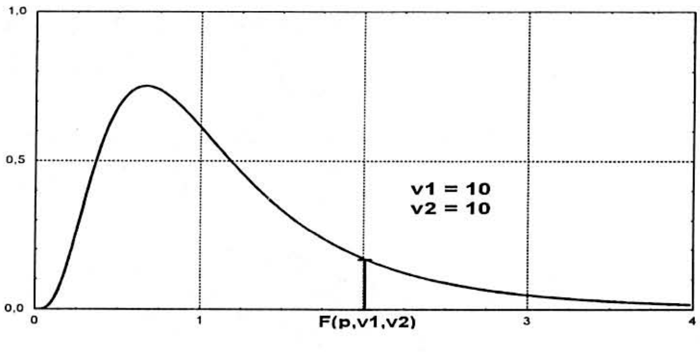
- مثال1: $(0.99,10) = 23.20$
- مثال2: $(0.025,10) = 3.247$

6.5.1- توزيع F (فيشر، سنيديكور، Fischer, Snedecor) :

أحد التوزيعات الإحتمالية المتصلة المهمة والمستخدمة في إختبار الفرضيات و في تحليل التباين. يعرف متغيره العشوائي بالدالة الإحتمالية التالية:

$$F > 0 \text{ و } f(F) = \frac{C.F^{(v1-2)/2}}{(v_2 + v_1.F)^{(v1+v2)/2}} \qquad (1.38)$$

يرمز له بالرمز(v_1,v_2) F ، حيث V_1 و V_2 هما درجات الحرية و C هو ثابت يعتمد على v_1 و v_2 ليجعل المساحة تحت المنحنى يساوي 1.



إن لهذا التوزيع عددان من درجة الحرية، وحيث أن V_2 لا تظهر إلا في المقام، فإننا نسمي V_2 درجات حرية المقام و نسمي V_1 درجات حرية البسط. يقترب توزيع F من التوزيع الطبيعي بزيادة قيمتي V_1 و V_2.

➢ مثـــــال:

$$F(0.95,9,7) = 3.68$$

➢ ملاحظة: هناك بعض المساحات الصغيرة لا توجد في جداول توزيع F، ولإيجاد هذه المساحات فإنه يمكن إستعمال القاعدة التالية:

$$F(p, v1, v2) = \frac{1}{F(1-p, v2, v1)} \qquad (1.39)$$

➢ مثـــــال:

$$F(0.05,10,7) = \frac{1}{F(0.95,7,10)} = \frac{1}{3.14} = 0.318$$

$$F(0.01,11,15) = \frac{1}{F(0.99,15,11)} = \frac{1}{4.25} = 0.23$$

- **علاقة بين الـــ χ^2 و t و F:**

أ) $$F_{(1-p,1,v)} = t^2_{(1-(p/2),v)} \qquad (1.40)$$

➢ مثـــــال:

إذا كانت لدينا: $p = 0.05$ و $v = 3$ فإن:

$$F_{(1-0.05,1,3)} = 10.1$$

$$t(1-(p/2),v) = t(1-(0.05/2),3) = 3.18$$

$$t^2 = 10.11$$

ب): $$F_{(p,v,\infty)} = \frac{\chi^2_{(p,v)}}{v} \qquad (1.41)$$

➢ مثـــــال:

$$F_{(0.95,3,\infty)} = 2.60$$

$$\frac{\chi^2_{(0.95,3)}}{3} = \frac{7.81}{3} = 2.60$$

6.1- التوزيعات الإحتمالية الثنائية:

نفرض أن X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس فضاء العينة S حيث:

$$Sx = \{Y_1, Y_2, ...Yn\} \quad و \quad Sx = \{X_1, X_2, ...X_n\}$$

إذا كان (X,Y) متغيرا عشوائيا ثنائيا فإن h (X,Y) يكون إقترانا إحتماليا (توزيعا مشتركا) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} h(x,y) \geq 0 \\ \sum_x \sum_y h(x,y) = 1 \end{cases} \qquad (1.42)$$

X \ Y	Y_1	Y_2	……..	Y_m	المجموع
X_1	$h(x_1,y_1)$	$h(x_1,y_2)$	……	$h(x_1,y_m)$	$f(X_1)$
X_2	$h(x_2,y_1)$	$h(x_2,y_2)$	…….	$h(x_2,y_m)$	$f((x_2)$
.		.			
.		.			
X_n	$h(x_n,y_1)$	$h(x_n,y_2)$	……	$h(x_n,y_m)$	$f(x_n)$
المجموع	$g(y_1)$	$g(y_2)$	……	$g(y_m)$	

نسمي:

$f_x(x) = \sum_y h(x,y)$ (1.43) بالكثافة الهامشية للمتغير X

أما $g_y(y) = \sum_x h(x,y)$ (1.44) فهو إقتران الكثافة الهامشية لــ Y.

أما الكثافة الشرطية للمتغير X إذا علم Y فهي:

$$h(x/y) = \frac{h(x,y)}{f_y(y)} \qquad (1.45)$$

والعكس، الكثافة الشرطية للمتغير Y إذا علم X فهي:

$$h(y/x) = \frac{h(x,y)}{f_x(x)} \qquad (1.46)$$

➢ **مثـــــال1:**

ليكن X المتغير العشوائي المعرف كما يلي:

$$\begin{cases} X=1 & \text{الشخص يدخن} \\ X=0 & \text{الشخص لا يدخن} \end{cases}$$

وليكن Y المتغير العشوائي المعرف كمايلي:

$$\begin{cases} X=1 & \text{الشخص مصاب بالسرطان} \\ Y=0 & \text{الشخص غير مصاب} \end{cases}$$

نلخص الإقتران الإحتمالي $h(X,Y)$ كما يلي:

Y / X	0	1
0	0.40	0.02
1	0.03	0.55

إن إحتمال أن يكون الشخص وغي مصاب هو 0.40 أي:

$P(X=0, Y=0) = h(0,0) = 0.40$

$P(X=0, Y=1) = h(0,1) = 0.02$

....

➢ **مثـــال2:**

من خلال الإقتران الإحتمالي التالي يمكن إيجاد:

Y / X	0	1	الكثافة الهامشية $X\ f_x(x)=\sum_y h(x,y)$
0	0.1	0.0	0.1
1	0.3	0.4	0.7
2	0.1	0.1	0.2
الكثافة الهامشيةY $g_y(y)=\sum_x h(x,y)$	0.5	0.5	1

أما الإحتمالات الشرطية $h(x/y)=\frac{h(x,y)}{f_y(y)}$ فتكون على الشكل التالي:

X \ Y	0	1
0	0.2	0
1	0.6	0.8
2	0.2	0.2

$$h(x/y)=\frac{h(x,y)}{f_y(y)}=f(x/y)=\frac{h(0,1)}{0.5}=\frac{0.1}{0.5}=0.2$$

$$h(x/y)=\frac{h(x,y)}{f_y(y)}=f(x/y)=\frac{h(1,1)}{0.5}=\frac{0.3}{0.5}=0.6$$

$$h(x/y)=\frac{h(x,y)}{f_y(y)}=f(x/y)=\frac{h(1,2)}{0.5}=\frac{0.1}{0.5}=0.2$$

....

➢ **ملاحظة:**

يكون X و Y مستقلين إذا كان:

$$(1.44)\ h(X,Y)=f_x(X).g_y(Y)$$

ففي المثال السابق نجد أن:

$$h(X,Y)\neq f_x(X).g_y(Y)$$

$$h(0,1)\neq 0.1\text{x}0.5$$

$$0.1\neq 0.05$$

أي أن المتغيرين مرتبطان.

1.6.1- الأمل الرياضي:

ا)– حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة:

إذا كان X و Y متغيران عشوائيان منفصلين و معرفين بالإقتران h(X,Y) فإن:

$$E(X) = \mu_x = \sum_x \sum_y X.h(X,Y) \qquad (1.47)$$

$$E(Y) = \mu_y = \sum_y \sum_x Y.h(X,Y) \qquad (1.46)$$

ب)– حالة المتغيرات العشوائية المتصلة:

إذا كان X و Y متغيران عشوائيان متصلين و معرفين بالإقتران f(X,Y) فإن:

$$E(X) = \mu_x = \iint_R X.h(X,Y)dXdY \qquad (1.48)$$

$$E(Y) = \mu_y = \iint_R Y.h(X,Y)dXdY \qquad (1.49)$$

2.6.1– التباين:

ا)– حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة:

$$\sigma^2(X) = \sum_x \sum_y (X - E(X))^2.h(X,Y) \qquad (1.50)$$

$$\sigma^2(Y) = \sum_x \sum_y (Y - E(Y))^2.h(X,Y) \qquad (1.51)$$

ب)– حالة المتغيرات العشوائية المتصلة:

$$\sigma^2(X) = \iint_R (X - E(X))^2.h(X,Y)dXdY \qquad (1.52)$$

$$\sigma^2(Y) = \iint_R (Y - E(Y))^2.h(X,Y)dXdY \qquad (1.53)$$

3.6.1– التباين المشترك (التغاير):

له بالرمز Cov(X,Y)، و يعطى بالعلاقة التالية:

ويرمز ا)– حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{xy} = \sum_i \sum_j (X_i - \mu_x)(Y_j - \mu_y).h(X,Y) \qquad (1.54)$$

ويمكن تبسيطه ليأخذ الشكل التالي:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{xy} = \sum_i \sum_j X_i.Y_j.h(X,Y) - \mu_x.\mu_y \quad (1.55)$$
$$= E(X,Y) - E(X).E(Y)$$

ب)- حالة المتغيرات العشوائية المتصلة:

$$Cov(X,Y) = \iint_R (X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y).h(X,Y)dXdY \quad (1.56)$$

4.6.1- معامل الإرتباط:

يقيس معامل الإرتباط شدة العلاقة بين المتغير X و المتغير Y، و يعطى بالعلاقة التالية:

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.57)$$

حيث: $0 \le \rho \le 1$

إذا كان $Cov(x,y) = 0$ فإن $\rho = 0$، أي أن X و Y مستقلان.

➢ **تمـــــرين:**

نفترض التوزيع المشترك الإحتمالي التالي:

X \ Y	-3	2	4	المجموع
1	0.1	0.2	0.2	0.5
2	0.3	0.1	0.1	0.5
المجموع	0.4	0.3	0.3	1

ا): أحسب التباين المشترك لهذا التوزيع،

ب): أحسب معامل الإرتباط، هل X وY مستقلان؟.

➢ الحـــــل:

لدينا:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{xy} = \sum_i \sum_j X_i . Y_j . h(X,Y) - \mu_x . \mu_y$$

$$\mu_x = \sum Xf(X) = 1x0.5 + 3x0.5 = 2$$

$$\mu_y = \sum Yg(Y) = -3x0.4 + 2x0.3 + 4x0.3 = 0.6$$

$$E(X,Y) = \sum_i \sum_j X_i . Y_j . h(X,Y) = 1x(-3)x0.1 + 1x2x0.2 + ... + 3x4x0.1 = 0$$

ومنه:

$$Cov(X,Y) = 0 - 2x0.6 = -1.2$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\sigma^2_x = \sum X^2.f(X) - \mu_x^2 = (1x0.5 + 9x0.5) - 4 = 1$$

$$\sigma^2_y = \sum X^2.g(X) - \mu_y^2 = (9x0.4 + 4x0.3 + 16x0.3) - 0.36 = 9.24$$

لنصل إلى:

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-1.2}{\sqrt{1}x\sqrt{9.24}} = -0.4$$

من المؤكد أن X و Y غير مستقلين لأن معامل الإرتباط غير معدوم، ولكن يمكن التأكد من العلاقة التالية:

$$h(X,Y) = f_x(X).g_y(Y)$$
$$h(1,-3) \neq 0.4x0.5$$
$$0.1 \neq 2$$

تمارين مختارة

التمرين الأول:

صنعت قطعة نقود بحيث يكون إحتمال ظهور الصورة هو ضعف إحتمال ظهور الكتابة في الرمية الواحدة. أوجد إحتمال ظهور الصورة، أوجد إحتمال ظهور الكتابة.

التمرين الثاني:

إختيرت 03 مصابح كهربائية بطريقة عشوائية من بين 15 مصباح كهربائي، 05 منها فاسدة. أوجد الإحتمال P يحيث يكون:
- جميعها سليمة، - واحدة فقط فاسدة، - واحدة على الأقل فاسدة.

التمرين الثالث:

إذا كان إحتمال إن يصيب 03 رجال هدفا هو على التوالي: 1/6، 1/4، 1/3. فإذا كان كل منهم يصوب مرة واحدة على الهدف، أوجد إحتمال: - أن يصيب الهدف مرة واحدة. - إذا أصاب الهدف رجل واحد فقط، ما هو إحتمال أن يكون الرامي الثاني؟.

التمرين الرابع:

في إحدى الجامعات، وجد أن 4% من الطلبة و1% من الطالبات أطوالهم أكثر من 1.80م وأن 60 % من مجموع طلبة الجامعة إناث. أختير بطريقة عشوائية أحد الطلبة ووجد أن طوله أكثر من 1.80م. ما هو إحتمال أن يكون هذا الإختيار طالبة.

التمرين الخامس:

تنتج 3 ماكينات على التوالي 60 %، 30 %، 10% % من الإنتاج الكلي لمصنع ما؛ فإذا كانت نسبة الإنتاج الفاسد لهذا المصنع هو على التوالي: 2 %،

3 %، 4 %. أختيرت وحدة بطريقة عشوائية ووجدت أنها فاسدة. أوجد إحتمال أن تكون من الماكنة الثالثة.

التمرين السادس:

ترمى زهرة نرد مرة واحدة. نعرف X المتغير العشوائي الذي يمثل ضعف العدد الذي يظهر.

- أنشئ جدول قانون التوزيع الإحتمالي المقابل ثم مثل بيانيا هذا التوزيع،
- أحسب أمله الرياضي ثم إنحرافه المعياري.

التمرين السابع:

ليكن X متغير عشوائي متصل معرفة بالدالة الإحتمالية التالية:

$$f(X) = \begin{cases} 1/2 & 1 \le X \le 3 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

- أحسب $P\ (0 \le X \le 3)$ ، - أحسب الأمل الرياضي ثم الإنحـــراف المعياري،
- مثل بيانيا هذا التوزيع.

التمرين الثامن:

إذا كان 10 % من الطلبة الأوائل ينتقلون من المدى القصير إلى المدى الطويل، فإذا كانت علامات الطلبة موزعة طبيعيا بمتوسط 72 وإنحراف معياري 9؛ فما هي أدنى علامة تأخذ بعين الإعتبار لإنجاز عملية الإنتقال ؟.

التمرين التاسع:

تم حقن مريض بمضاد حيوي معين، فإذا كان إحتمال أن يسبب المضاد الحيوي حساسية هو 0.01، فأوجد الإحتمال أنه من بين 2000 مريض تم حقنهم بالمضاد الحيوي أن يكون:

- مريض واحد يصاب بالحساسية، - 3 مرضى سيصابون،
- أكثر من 3 مرضى سيصابون بالحساسية.

التمرين العاشر:

متوسط طول 500 ورقة نبات ما هو 151 مم بإنحراف معياري 15مم، فإذا كانت الأطوال موزعة طبيعيا، فما هو عدد الأوراق التي أطواها:

- بين 120 و 155 مم، - أكبر من 185 مم.

التمرين الحادي عشر:

إذا كانت علامات الطلبة في مقياس الإحصاء الرياضي موزعة طبيعيا وكانت:

$$,n = 100, \qquad \sigma = 2 \sum X^2 = 14800$$

- إحسب إحتمال أن تكون علامة الطالب تزيد عن 17،
- إحسب إحتمال أن تكون علامة الطالب تقل عن 17.

التمرين الثاني عشر:

ألقيت قطعة نقود 12 مرة، ما هو إحتمال أن نحصل على الصورة عدد من المرات يتراوح بين 4 و 7 و ذلك بإستخدام:

- توزيع ذو الحدين،
- التقريب الطبيعي لذو الحدين.

التمرين الثالث عشر:

ألقيت قطعة نقود 3 مرات. نفرض X الذي يدل على 0 أو 1 تبعا لظهور الصورة أو الكتابة في الرمية الأولى؛ و نفرض أن Y تدل على عدد مرات ظهور الصورة.

- أوجد توزيع المتغيرX و المتغير Y،
- التوزيع المشرك لـــX و Y،
- أحسب التباين المشترك لهذا التوزيع ثم معلمل الإرتباط،
- هل X وY مستقلين؟.

التمرين الرابع عشر:

ليكن X المتغير العشوائي و له التوزيع التالي:

X:	-2	-1	1	2
F(X):	1/4	1/4	1/4	1/4

وأن $Y = X^2$

- أوجد التوزيع g الموافق للمتغير Y،
- أوجد التوزيع المشترك $h(X,Y)$،
- معامل الإرتباط لهذا التوزيع.

التمرين الخامس عشر:

ليكن X متغير عشوائي معرف من خلال رمي قطعة نقود متزنة حيث $X = 1$ عند ظهور الصورة، $X = 2$ عندما تظهر الكتابة. ترمى قطعة النقود 3 مرات متتالية، وليكن X_1 للرمية الأولى،X_2 للرمية الثانية، X_3 للرمية الثالثة.
نعرف المتغير Y بالقانون: $Y = X_1^2 - X_2 - X_3$.

- أوجد القيم الممكنة ..... $y_1, y_2,$ الموافقة لـــY وماهي الإحتمالات المقابلة $P_1, P_2,\ldots..$،
- مثل بيانيا دالة التوزيع الإحتمالية $f(y)$، حيث $f(Y<y)$،
- أحسب $E(Y)$ ثم σ.