الجزء الأول

مدخل إلى الميكانيك الكلاسيكي

الفصل الأول
علم الحركة

مقدمة الفصل الأول:

نتطرق في هذا الفصل الهام الذي خصصناه للاطلاع على المبادئ والقوانين التي بني عليها الميكانيك الكلاسيكي المتمثلة في قوانين نيوتن وأهم النتائج المترتبة عليها بالإضافة للمقادير الفيزيائية المحفوظة في الميكانيك الكلاسيكي بالإضافة لدراسة النسبية الغاليلية الكلاسيكية ومفهوم جملة مركز الكتل.

نظرة عامة للميكانيك الكلاسيكي:

يهتم الميكانيك الكلاسيكي بدراسة الظواهر والحركات الفيزيائية التي تتم بسرعات صغيرة بالنسبة لسرعة الضوء في الفراغ. وتعتبر نتائجه في هذا المجال متطابقة كثيرا مع المعطيات التجريبية وتمتد نجاحات الميكانيك الكلاسيكي حتى لدراسة بعض الظواهر الفيزيائية الهامة كحركة المجموعة الشمسية المتمثلة في الشمس ومجموعة الكواكب التابعة لها حيث نجح الميكانيك الكلاسيكي إلى حد ما في تحديد مسار الكواكب حول الشمس من خلال قوانين كبلر الثلاثة.

مدخل عام للميكانيك الكلاسيكي:

إن علم الميكانيك الكلاسيكي هو إحدى فروع علوم الفيزياء الذي تأسس في مطلع القرن السادس عشر نتيجة مجهودات الكثير من العلماء نذكر من بينهم على سبيل المثال لا الحصر غاليلي وكبلر وكوبرنيك وابن سينا وغيرهم. حيث يهتم هذا العلم بدراسة الحالة الديناميكية (حركة وتحريك) النقطة المادية أو مجموعة النقاط المادية التي يمكن أن تكون منفصلة أو متباعدة كحالة المجموعة الشمسية (الشمس والكواكب والأقمار التابعة لها) مثلا حيث تكون المسافات النسبية بين مختلف مكوناتها معتبرة أو متصلة (مستمرة) مثل الجسم الصلب حيث تكون المسافات النسبية بين الذرات المكونة له مهملة بالنسبة لأبعاده. ولقد كان الفضل الكبير للعالم البريطاني إسحاق نيوتن في

صياغة قوانينه الثلاثة. وقبل أن نتطرق بإختصار لها من المهم التذكير ببعض المصطلحات والمفاهيم الفيزيائية المتداولة في الحالة الماكروسكوبية أي الحالة العيانية التي يمكن الاطلاع عليها بالعين المجردة كحالة الجسم المعزول والنقطة المادية وكمية الحركة و غير ذلك.

الجسيم المعزول:

الكائن الذي لا يتفاعل مع الأنظمة الفيزيائية الخارجية المحيطة به وكنتيجة لذلك يكون مجموع القوى الخارجية المطبقة عليه معدومة لانعدام تفاعله معها. وتعتبر هاته الحالة المثالية عملية لسببين أساسيين نلخصهما فيمايلي:

السبب الأول: مجموع القوي الخارجية المؤثرة عليه تلغي بعضها البعض مثنى-مثنى حتى لو كان تأثيرها معتبر نسبيا.

السبب الثاني: تأثير القوى الخارجية عليه يكون ضعيف بحيث لا تغير من حالته الأصلية وبالتالي يبقى محافظا على وضعه الابتدائي حتى بوجود هاته القوى الضعيفة.

النقطة المادية:

من الناحية الرياضية يقصد بالنقطة المادية كرة نصف قطرها يؤول للصفر. أما من الناحية العملية فهي حالة مثالية نعتبرها مفيدة فيزيائيا نتيجة لأبعاد الأجسام بالنسبة لبعضها البعض حيث أن الإنسان بالنسبة للأرض يمكن إعتباره نقطة مادية والأرض بالنسبة للشمس يمكن إعتبارها نقطة مادية والشمس بالنسبة لمجرة أكبر تكون نقطة مادية وهكذا....

كمية الحركة:

هي مقدار فيزيائي شعاعي ديناميكي يوازي شعاع السرعة من حيث الاتجاه يربط بين خواص الحركة ممثلة في السرعة اللحظية والعطالة ممثلة في الكتلة وقيمته تتناسب طردا مع قيمة السرعة اللحظية والكتلة العطالية ونعبر عنها بالعلاقة:

$$\vec{P} = m\vec{v}..(1.1)$$

حيث m هي كتلة الجسيم أما $\vec{v}$ فتمثل سرعته اللحظية التي تعرف من خلال المشتق الأول لشعاع الموضع بالنسبة للزمن. أما وحدته في الجملة الدولية S.I. المعروفة بالرمز MKSA أي المتر. الكلغ. الثانية. الأمبير فهي:

$$\left[\vec{P}\right] = [m]\left[\vec{v}\right] = kgmS^{-1}$$

المسار:

نقصد بالمسار الكلاسيكي مجموعة النقاط الهندسية التي يمر بها الجسيم المتحرك خلال الزمن.

معادلة المسار:

هي العلاقة بين الإحداثيات الكارتزية (x, y, z) أو القطبية (ρ,θ) أو الاسطوانية (ρ,θ, z) أو الكروية (r,θ,φ) حيث أن الزمن لا يجب أن يظهر في معادلة المسار و نعبر عنها في الحالة العامة بالصيغة التالية:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ f(\rho,\theta) = 0 \\ f(\rho,\theta, z) = 0...........(1.2) \\ f(r,\theta,\varphi) = 0 \end{cases}$$

مثال:

عندما يتحرك جسم في المستوى (Oxy) وفق مسار دائري نصف قطره R ومركزه مبدأ بالاحدثيات تكون معادلة المسار في هذه الحالة:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow$$
$$f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0.....(1.3)$$

علم الحركة:

يقصد بعلم الحركة أو الحركيات التطرق لحركة النقطة المادية أو مجموع النقاط المادية بدون التعرض لمسبباتها أي القوى أو كتلها.

يقال عن جسم أنه في حالة حركة إذا غير موضعه الهندسي بدلالة الزمن وذلك بالنسبة لجسم آخر أو تغيرت المسافة الهندسية الفاصلة بينهما.

إذا بقيت المسافة بين جسيمين ثابتة خلال الزمن فنقول أن أحدهما ساكن بالنسبة للآخر. إن صفة السكون هذه التي إكتسبها أحد الجسيمين بالنسبة للآخر لا تكون مطلقة بمعنى أنه إذا كان أحدهما ساكن بالنسبة للآخر فهو في نفس الوقت قد يكون في حالة حركة بالنسبة لجسم آخر كحالة شخصين في سيارة واحدة موجودة في حالة حركة بالنسبة لشخص على الرصيف فكل من الشخصين ساكنين بالنسبة لبعضهما ولكنهما في نفس الوقت في حالة حركة بالنسبة للشخص المراقب على رصيف الطريق. أي أنه يكون في وضعية السكون وفي وضعية الحركة حسب طبيعة الجسيم المراقب له أو حسب الجملة التي يتحدد وضعه بالنسبة لها.

بطبيعة الحال تعتبر كل من الحركة والسكون مفهومان فيزيائيان نسبيان (يتغير مفهومهما من معلم لمعلم آخر) لان صفة الحركة والسكون قد تتحقق في نفس الوقت على جسيم واحد بالنسبة لمراقبين مختلفين وعلى هذا الأساس فلتحديد معنى فيزيائي مفيد لهما يجب أن نتكلم عن مدلولهما بالنسبة لجملة

مراقبة وسنهتم بجمل المراقبة الغاليلية أو جملة المراقبة العطالية (تعبيران لمفهوم فيزيائي واحد) التي تعرف على أنها جملة المحاور الإحداثية الثلاث المتعامدة والمتجانسة في الفضاء التي يتحقق فيه مبدأ العطالة حيث أن الجسيم المعزول يكون إما ساكنا أو يتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لها.

وتعتبر أي جملة تتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لأي جملة عطالية تعتبر أيضا جملة غاليلية وبالتالي بناءا على هذا المفهوم يوجد عدد لانهائي من الجمل الغاليلية أو العطالية لان مبدأ العطالة يتحقق فيها أيضا.

المقادير الفيزيائية الحركية:

يقصد بالمقادير الفيزيائية الحركية مقادير شعاعيه وأخرى سلمية يجب معرفتها. بالإمكان التعبير على تلك المقادير في عدة أنظمة إحداثيات منها جملة الإحداثيات الكارتزية وجملة الإحداثيات القطبية وجملة الإحداثيات الاسطوانية وجملة الإحداثيات الذاتية.

تجدر الإشارة إلى أننا نستعمل جملة الإحداثيات حسب طبيعة المسالة المدروسة. وتكون النتائج الفيزيائية هي نفسها بغض النظر على الجملة المستعملة وإنما يعتبر نظام الإحداثيات وسيلة رياضية تمكننا من التوصل للنتائج الفيزيائية بأقصر الطرق وأقل التكاليف. فمثلا جملة الإحداثيات الكارتزية تصلح لدراسة كل الأنظمة الفيزيائية لكنها في بعض الأحيان تكون مكلفة أما جملة الإحداثيات القطبية لا تصلح إلا لدراسة الحركات المستوية وهي حالة خاصة من جملة الإحداثيات الاسطوانية.

إن المقادير الفيزيائية الحركية يتم دراستها بطريقتين:

الطريقة الشعاعية:

وذلك من خلال معرفة شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ وشعاع السرعة $\vec{v}$ وكذا شعاع التسارع $\vec{\gamma}$ وذلك بدلالة الزمن.

الطريقة السلمية:

وذلك من خلال معرفة كل معادلات الحركة:حيث تكون في الإحداثيات الكارتزية $(x(t), y(t), z(t))$ أو في الإحداثيات القطبية $(\rho(t), \theta(t))$ أو في الإحداثيات الاسطوانية $(\rho(t), \theta(t), z(t))$ أو في الإحداثيات الكروية $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$ بالإضافة لمعادلة المسار المعبر عنها في المعادلة (1.2) وكذا طول المسار $S(t)$.

المقادير الفيزيائية الحركية:

1- شعاع الموضع:

لتكن M نقطة في الفضاء المنسوب للمعلم $R(Oxyz)$ الذي أساسه $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نسمي مسقط النقطة M_1 في المستوي (Oxy) أما مسقط M_1 على المحورين (Ox) و (Oy) هما M_2 و M_3 على التوالي بتطبيق علاقة شال الشعاعية بالإمكان كتابة عبارة شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$وفق العبارة التالية:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{M_2M_1} + \overrightarrow{M_1M} \ldots\ldots(1.4)$$

وبإعتبار أن:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_2} = x\vec{i} \\ \overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM'_1} = y\vec{j} \ldots\ldots\ldots\ldots(1.5) \\ \overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_3} = z\vec{k} \end{cases}$$

حيث أن M'_1 و M_3 تمثلان على التوالي مسقط M_1 و M على المحورين(Oy) و (Oz) وبالتالي يصبح شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ وفق العبارة التحليلية التالية:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots(1.6)$$

2- مفهوم السرعتين المتوسطة واللحظية:

لنعتبر جسيم يتحرك في الفضاء المنسوب للمعلم $R(Oxyz)$ الذي أساسه $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. في اللحظة t يتواجد هذا الجسم في النقطة M. وفي اللحظة $(t+\Delta t)$ يتواجد هذا الجسم في النقطة M'. تعرف السرعة المتوسطة للجسم المتحرك بين اللحظتين t و $(t+\Delta t)$ كمايلي:

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t+\Delta t - t}$$

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OM'}}{t+\Delta t - t}$$

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}}{t+\Delta t - t}........(1.7)$$

وهي من الناحية الفيزيائية تمثل متوسط السرعة الحقيقية بين النقطتين M و M' خلال الفترة الزمنية Δt.

نسمي السرعة اللحظية للجسم المتحرك السرعة في كل لحظة من الزمن ونرمز لها بالرمز $\vec{v}$ وتعطى بالعبارة التالية:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\vec{V}_{moy}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}}{t+\Delta t - t}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

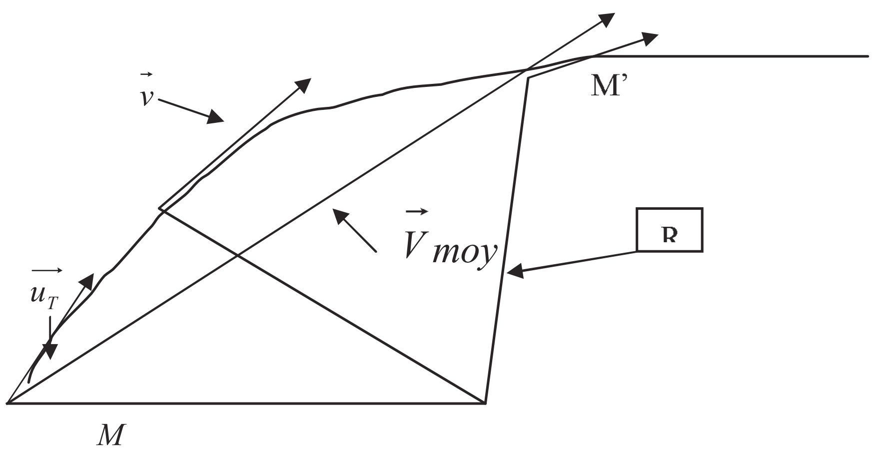
وبإستعمال العبارتين (1.8) و (1.6) تصبح عبارة السرعة اللحظية:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}..................(1.9)$$

وبالتالي تكون مركبات السرعة اللحظية:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.10) \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$



من الواضح أن السرعة اللحظية تكون مماسية للمسار الفعلي وبالتالي بالإمكان كتابة شعاعه وفق العبارة التالية:

$$\vec{v} = v\overrightarrow{u_T} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.11)$$

حيث أن $\overrightarrow{u_T}$ يمثل شعاع الوحدة المماس للمسار. يسمى الطول العنصري للمسار بين النقطتين M و M' القوس MM' حيث أن:

$$\overline{MM'} = \left\| \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} \right\|$$

$$\overline{MM'} = \left\| (x'-x)\vec{i} + (y'-y)\vec{j} + (z'-z)\vec{k} \right\|$$

$$\overline{MM'} = \left\| dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \right\|$$

$$\Rightarrow \overline{MM'} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \equiv dS \ldots\ldots(1.12)$$

يسمى dS عنصر الفاصلة المنحنية و تكتب عبارته الشعاعية كمايلي:

$$\overrightarrow{dS} = dS\overrightarrow{u_T} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.13)$$

بقسمة المعادلة (1.12) على الزمن العنصري dt نجد:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \ldots\ldots\ldots(1.14)$$

بإستعمال المعادلتين (1.14) و (1.10) نجد:

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \left\| \vec{v} \right\| \ldots\ldots\ldots(1.15)$$

هذا يعني أن طويلة السرعة تساوي لمشتق عنصر الفاصلة المنحنية بالنسبة للزمن:

$$\frac{dS}{dt} = \left\|\vec{v}\right\| \quad \text{..........................} (1.16)$$

3- شعاع التسارع:

لنعتبر جسيم جسيم يتحرك في الفضاء المنسوب للمعلم $R(Oxyz)$ الذي أساسه $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. في اللحظة t يتواجد هذا الجسم في النقطة M وفي اللحظة $(t + \Delta t)$ يتواجد هذا الجسم في النقطة M'. تعرف التسارع المتوسط للجسم المتحرك بين اللحظتين t و $(t + \Delta t)$ كمايلي:

$$\vec{\gamma}_{moy} = \frac{\vec{v}'(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{t + \Delta t - t}$$

نسمي التسارع اللحظي للجسم المتحرك المقدار الذي يعطى تطور السرعة في كل لحظة من الزمن و نرمز لها بالرمز $\vec{\gamma}$ وتعطى بالعبارة التالية:

$$\vec{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\vec{\gamma}_{moy}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t + \Delta t - t} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

تصبح عبارة التسارع اللحظي:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$
$$\vec{\gamma} = \gamma_x \vec{i} + \gamma_y \vec{j} + \gamma_z \vec{k}$$

وبالتالي تكون مركبات السرعة اللحظية:

$$\begin{cases} \gamma_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ v_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ v_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

وإستنادا للعبارة (1.13) يمكننا كتابة شعاع السرعة في جملة الإحداثيات الذاتية:

$$\frac{\overrightarrow{dS}}{dt} = \frac{dS}{dt}\overrightarrow{u_T}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{dS}{dt}\overrightarrow{u_T} = \|\vec{v}\|\overrightarrow{u_T}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\overrightarrow{u_T} + \|\vec{v}\|\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\overrightarrow{u_T} + \|\vec{v}\|\frac{d\overrightarrow{u_T}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$$

وضع $\dfrac{d\overrightarrow{u_T}}{d\alpha} = \overrightarrow{u_N}$ و $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{\|\vec{v}\|}{R}$ حيث R تسمى بنصف قطر الانحناء
وبالتالي تصبح عبارة التسارع في جملة الإحداثيات الذاتية:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\overrightarrow{u_T} + \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}\overrightarrow{u_N}$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_T\overrightarrow{u_T} + \gamma_N\overrightarrow{u_N}$$

حيث أن:

$$\gamma_T = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$$

$$\gamma_N = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}$$

تسمى γ_T بالمركبة المماسية لشعاع التسارع بينما γ_N تسمى بالمركبة الناظمية لشعاع التسارع. تكتب طويلة شعاع التسارع بدلالة المركبتين المماسية والناظمية في جملة الإحداثيات الذاتية كمايلي:

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_T^{\ 2} + \gamma_N^{\ 2}}$$

جمل الإحداثيات:

إن الهدف العام من دراسة علم الحركة هو معرفة المقادير الفيزيائية الحركية السلمية والشعاعية ويمكن رؤية هاته المقادير من خلال ما يسمى بجمل الإحداثيات. من بين جمل الإحداثيات الأكثر إستعمالا:

- جملة الإحداثيات الكارتزية: تستعمل لدراسة كل الحركات.

- جملة الإحداثيات القطبية: وتخص الحركات المستوية فقط.

- جملة الإحداثيات الاسطوانية: من المناسب لاستعمالها في المسائل الفيزيائية ذات التناظر الاسطواني.

- جملة الإحداثيات الكروية: من المناسب لاستعمالها في المسائل الفيزيائية ذات التناظر الكروي.

- جملة الإحداثيات الذاتية: وهي مرتبطة بالموضع الذي يتواجد فيه الجسيم المتحرك.

إن النتائج الفيزيائية تكون نفسها مهما إختلفت طريقة التعبير عليها حيث أن إختيار جملة إحداثيات ما يعود لطبيعة المسألة المدروسة فمثلا عندما يتحرك جسم على سطح كرة يكون من المناسب إستخدام نظام الإحداثيات الكروية لكن إستعمال نظام الإحداثيات الكارتزية يؤدي لنفس النتائج لكن بتكلفة أكبر من حيث الوقت والمجهود. وعندما ندرس حركة على سطح أسطوانة من المناسب إستخدام جملة الإحداثيات الاسطوانية وعند دراسة حركة وفق قطع ناقص أو وفق مسار دائري الشكل يكون من الأفضل إستعمال نظام الإحداثيات القطبية وهكذا...

1- جملة الإحداثيات الكارتزية:

يمكن تحديد موضع أي نقطة M في الفضاء بالنسبة لنظام إحداثيات يرمز له بالرمز $R(Oxyz)$ أساسها $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متعامد مثنى-مثنى ومتجانسة أي أن طول أساسه متساوي ويساوي لوحدة القياس المختارة:

$$\begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases} \quad ....(1.17)$$

إن موضع النقطة المادية في الفضاء يمكن تعيينه بالنسبة للجملة المتعامدة والمتجانسة بالإحداثيات الديكارتية (x, y, z) حيث شعاع موضعها $\overrightarrow{OM}$ وسرعتها اللحظية $\vec{v}$ على التوالي:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k} \end{cases} \therefore \quad ....(1.18)$$

قيمة شعاعي الموضع والسرعة يعينان بالعلاقات التالية على التوالي:

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2} \end{cases} \quad \text{..................(1.19)}$$

لنحسب عبارة شعاع التسارع في جملة الإحداثيات الكارتزيه:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right)$$

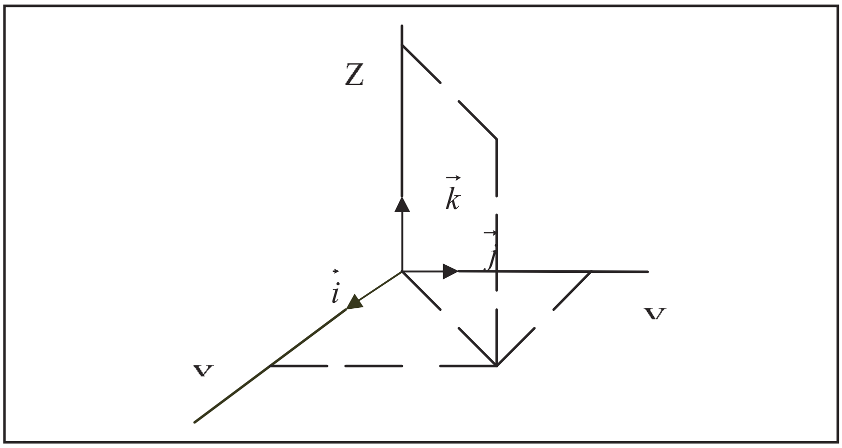
$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

أما قيمة شعاع التسارع فتكون كمايلي:

$$\left\|\vec{\gamma}\right\| = \left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

معادلات الحركة ومعادلة المسار فتعين كما يلي في جملة الإحداثيات الكارتزية:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ f(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{.......................................(1.20)}$$



2-جملة الإحداثيات القطبية:

كما أنه بالإمكان تعيين موضع النقطة المادية M في المستوى بالنسبة للجملة $R(Oxy)$ بإستعمال الإحداثيات الأسطوانية (ρ,θ) والقاعدة $(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta)$ حيث ترتبط الإحداثيات القطبية والقاعدة القطبية بالإحداثيات الديكارتية والقاعدة الديكارتية كمايلي:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \vec{i}, \overrightarrow{OM'} \end{cases} \qquad \text{.................................}(1.21)$$

و:

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \end{cases} \qquad \text{.............}(1.22)$$

حيث شعاع موضعها $\overrightarrow{OM}$ وسرعتها اللحظية $\vec{v}$ على التوالي:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho \\ \vec{v} = \dfrac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \end{cases} \qquad \text{............}(1.23)$$

لأنه بالاعتماد على العلاقات (1.22) نجد:

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \left(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \vec{u}_\theta\frac{d\theta}{dt}$$

أما قيمة شعاعي الموضع و السرعة فيعينان بالعلاقات التالية على التوالي:

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\rho\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2} \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.24)$$

لنحسب عبارة التسارع :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u}_\rho + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_\rho$$

ومنه نجد:

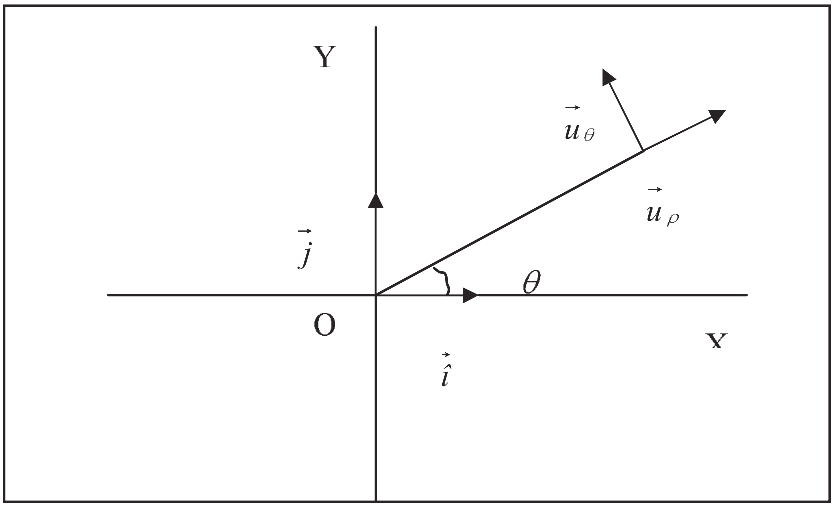
$$\vec{\gamma} = \left\{\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\vec{u}_\rho + \left\{2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}\vec{u}_\theta$$

وبالتالي تكون قيمة طويلة التسارع في جملة الإحداثيات القطبية:

$$\|\vec{\gamma}\| = \left(\left\{ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right\}^2 + \left\{ 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2} \right\}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

أما معادلات الحركة ومعادلة المسار فتعين كما يلي في جملة الإحداثيات الاسطوانية:

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = \theta(t) \\ f(\rho,\theta) = 0 \end{cases} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1.25)$$



3- جملة الإحداثيات الاسطوانية:

كما أنه بالإمكان تعيين موضع النقطة المادية M في الفضاء بالنسبة للجملة $R(Oxyz)$ باستعمال الإحداثيات الأسطوانية (ρ,θ,z) والقاعدة

الاسطوانية $\left(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta,\vec{k}\right)$ حيث ترتبط الإحداثيات الأسطوانية والقاعدة الأسطوانية بالإحداثيات الديكارتية والقاعدة الديكارتية كما يلي:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \vec{i},\overrightarrow{OM'} \\ z = z \end{cases} \quad ....(1.26)$$

و:

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases} \quad ....(1.27)$$

حيث شعاع موضعها $\overrightarrow{OM}$ و سرعتها اللحظية $\vec{v}$ على التوالي:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} \\ \vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{k} \end{cases} \quad ....(1.28)$$

أما قيمة شعاعي الموضع والسرعة فيعينان بالعلاقات التالية على التوالي:

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\rho\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \end{cases} \quad ....(1.29)$$

لنحسب عبارة شعاع التسارع:

$$\vec{\gamma}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$\Rightarrow \vec{\gamma}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_{\rho}+\rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_{\theta}+\frac{dz}{dt}\vec{k}\right)$$
$$\Rightarrow \vec{\gamma}=\frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u}_{\rho}+\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_{\theta}+\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_{\theta}+\rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_{\theta}-\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_{\rho}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$
$$\vec{\gamma}=\left\{\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\vec{u}_{\rho}+\left\{2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}+\rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}\vec{u}_{\theta}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

وبالتالي تكون قيمة طويلة التسارع في جملة الإحداثيات الاسطوانية:

$$\left\|\vec{\gamma}\right\|=\left(\left\{\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}^2+\left\{2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}+\rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

أما معادلات الحركة ومعادلة المسار فتعين كمايلي في جملة الإحداثيات الاسطوانية على التوالي:

$$\begin{cases}\rho=\rho(t)\\ \theta=\theta(t)\\ z=z(t)\\ f(\rho,\theta,z)=0\end{cases}\qquad ....(1.30)$$

4- جملة الإحداثيات الكروية:

كما أنه بالإمكان تعيين موضع النقطة المادية M في الفضاء بالنسبة للجملة $R(Oxyz)$ بالإحداثيات الكروية (r,θ,φ) والقاعدة $\left(\overrightarrow{U_r},\overrightarrow{U_\theta},\overrightarrow{U_\varphi}\right)$

حيث ترتبط الإحداثيات الكروية والقاعدة الكروية بالإحداثيات الديكارتية والقاعدة الديكارتية على التوالي كمايلي:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases} \qquad (1.31)$$

و:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos(\theta)\vec{k} + \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{k} + \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} \\ \vec{u}_\varphi = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j} \end{cases} \qquad (1.32)$$

حيث أن $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ بينما $0 \le \varphi \le 2\Pi$ التي تكون محصورة بين مسقط شعاع الموضع في المستوى (Oxy) والمحور (Ox) وتسمى بزاوية السمت أما $0 \le \theta \le \Pi$ فهي الزاوية المحصورة بين شعاع الموضع والمحور (Oz). يحدد كل من شعاعي الموضع $\overrightarrow{OM}$ و السرعة اللحظية $\vec{v}$ على التوالي:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r \\ \vec{v} = \dfrac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\dfrac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi \end{cases} \qquad (1.33)$$

لان:

$$\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\cos(\theta)\vec{k} + \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u_r}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\cos(\theta)\vec{k}\right) + \left(\frac{d}{dt}\sin(\theta)\right)\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\left(\frac{d}{dt}\cos(\varphi)\right)\vec{i} + \left(\frac{d}{dt}\sin(\theta)\right)\sin(\varphi)\vec{j} +$$
$$+\sin(\theta)\left(\frac{d}{dt}\sin(\varphi)\right)\vec{j}$$

ومنه نجد:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \left(\frac{d}{d\theta}\cos(\theta)\vec{k}\right)\frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{d}{d\theta}\sin(\theta)\right)\frac{d\theta}{dt}\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\left(\frac{d}{d\varphi}\cos(\varphi)\right)\frac{d\varphi}{dt}\vec{i} +$$
$$\left(\frac{d}{d\theta}\sin(\theta)\right)\frac{d\theta}{dt}\sin(\varphi)\vec{j} + +\sin(\theta)\left(\frac{d}{d\varphi}\sin(\varphi)\right)\frac{d\varphi}{dt}\vec{j}$$

وبالتالي نجد:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \left(-\sin(\theta)\vec{k}\right)\frac{d\theta}{dt} + \left(\cos(\theta)\right)\frac{d\theta}{dt}\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\left(-\sin(\varphi)\right)\frac{d\varphi}{dt}\vec{i} +$$
$$\left(\cos(\theta)\right)\frac{d\theta}{dt}\sin(\varphi)\vec{j} + +\sin(\theta)\left(\cos(\varphi)\right)\frac{d\varphi}{dt}\vec{j}$$

وبالنظر للعلاقات (1.33) نجد بسهولة أن:

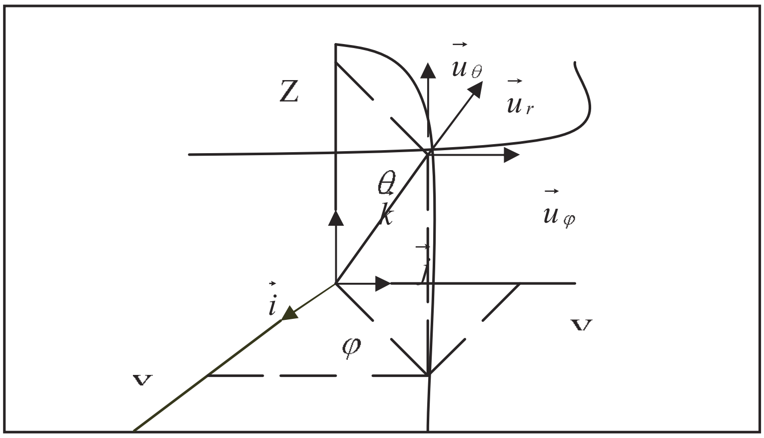
$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \sin(\theta)\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi$$

أما قيمة شعاعي الموضع والسرعة فيعينان بالعلاقات التالية على التوالي:

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{OM}\right| = r \\ \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}r\sin(\theta)\right)^2} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.34)$$

أما معادلات الحركة و معادلة المسار فتعين كمايلي:

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \\ \varphi = \varphi(t) \\ f(r,\theta,\varphi) = 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.35)$$



النسبية الكلاسيكية:

لتكن لدينا جملتان $(R)(Oxyz)$و $(R')(O'x'y'z')$. في اللحظة $t = t' = 0$ مبدأيهما منطبقان $(O \equiv O')$. تسمى $(R)(Oxyz)$ بالجملة المطلقة وكل القيم الفيزيائية بالنسبة لها تعتبر مقادير فيزيائية مطلقة أما الجملة $(R')(O'x'y'z')$ فتسمى بالجملة النسبية وكل القيم الفيزيائية بالنسبة لها تعتبر مقادير فيزيائية نسبية. نميز بين حالتين هما:

الحالة الأولى: تكون فيها $(R')(O'x'y'z')$ تتحرك بالنسبة للجملة المطلقة $(R)(Oxyz)$ حركة مستقيمة منتظمة.

الحالة الثانية:تكون فيها $(R')(O'x'y'z')$ تتحرك بالنسبة للجملة المطلقة $(R)(Oxyz)$ حركة مستقيمة و حركة دورانية.

دراسة الحركة الانسحابية للجملة النسبية:

تتحرك الجملة (R') بالنسبة لـ :. (R) حركة مستقيمة منتظمة بالسرعة الثابتة $\vec{V}$. إن الزمن والكتلة مقداران فيزيائيان مطلقان حسب مفاهيم الميكانيك الكلاسيكي أي أنهما لا يتغيرا من معلم لآخر. لنعتبر نقطة مادية M

إحداثياتها في اللحظة $t=t'$ بالنسبة للجملتين (R) و (R') على التوالي $M(x,y,z)$ و $M(x',y',z')$. يمكننا كتابة العلاقة الشعاعية لشال التالية:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.36)$$

حيث أن $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{O'M}$ شعاعي موضع M بالنسبة للجملتين $(R)(Oxyz)$ و $(R')(O'x'y'z')$ على التوالي والمعرفان كمايلي في جملة الإحداثيات الديكارتية:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'} \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.37)$$

وباعتبار أن الجملة $(R')(O'x'y'z')$ تتحرك بالسرعة الثابتة $\vec{V}$ التالية:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.38)$$

وبالاعتماد على العلاقتين (1.36) و (1.37) يمكننا كتابة علاقات التحويل الغاليلية التالية:

$$\begin{cases} x = x' + V_x t \\ y = y' + V_y t \\ z = z' + V_z t \\ t = t' \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.39)$$

حيث أن (V_x, V_y, V_z) مركبات سرعة الجملة (R') بالنسبة للجملة (R). ولتعيين العلاقة بين سرعتي النقطة المادية المطلقة و النسبية من وجهة نظر الميكانيك الكلاسيكي في الجملتين يمكننا انطلاقا من العلاقة (1.36) أن نكتب العلاقة التالية:

$$\vec{V}_{M/R} \equiv \vec{V}_a = \left\langle \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\rangle_R = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{V}_{M/R} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \quad ....(1.40)$$

لنحسب $\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$:

$$\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right)$$

$$\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{dx'}{dt'}\frac{dt'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt'}\frac{dt'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt'}\frac{dt'}{dt}\vec{k'} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt'}\frac{dt'}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt'}\frac{dt'}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt'}\frac{dt'}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{dx'}{dt'}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt'}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt'}\vec{k'} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt'} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt'} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt'} \quad ......(1.41)$$

لان $\frac{dt'}{dt} = 1$. لنرمز بـ: $\vec{v_e}$:

$$\vec{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt'} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt'} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt'} \quad ......(1.42)$$

لنرمز بالرمز: $\vec{v_r}$ لسرعة الجسم في الجملة النسبية وتسمى بالسرعة النسبية:

$$\vec{v_r} = \left\langle \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt'} \right\rangle_{R'} = \frac{dx'}{dt'}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt'}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt'}\vec{k'} \quad ....(1.43)$$

وعليه إنطلاقا من المعادلات (1.40) و (1.42) و (1.43) نجد أن السرعة المطلقة تساوي للمجموع الهندسي للسرعتين النسبية والمكتسبة:

$$\vec{V}_a = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.44)$$

ويسمى بقانون تركيب السرعات. وبإعتبار أن حركة الجملة $(R')(O'x'y'z')$ إنسحابية فقط بالسبة للجملة $(R)(Oxyz)$ يكون لدينا:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{i'}}{dt'} = 0 \\ \dfrac{d\vec{j'}}{dt'} = 0 \ldots\ldots\ldots(1.45) \\ \dfrac{d\vec{k'}}{dt'} = 0 \end{cases}$$

وبالتالي تكون السرعة المكتسبة:

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.46)$$

يسمى التسارع المطلق الذي يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\gamma_a}$ المشتق الأول للسرعة المطلقة بالنسبة للزمن المقاس في الجملة المطلقة أو المشتق الثاني لشعاع الموضع بالنسبة للزمن المقاس في الجملة المطلقة:

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \left\langle \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} \right\rangle_R = \left\langle \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right\rangle_R$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \ldots\ldots\ldots(1.47)$$

يسمى التسارع النسبي الذي يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\gamma_r}$ المشتق الأول للسرعة المطلقة بالنسبة للزمن المقاس في الجملة النسبية أو المشتق الثاني لشعاع الموضع بالنسبة للزمن المقاس في الجملة النسبية:

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \left\langle \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} \right\rangle_{R'} = \left\langle \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt'^2} \right\rangle_{R'}$$

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \frac{d^2x'}{dt'^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt'^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt'^2}\vec{k'} \ldots\ldots\ldots(1.48)$$

أما التسارع المكتسب $\overrightarrow{\gamma_e}$ فيمثل المقدار التالي:

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2} \ldots\ldots(1.49)$$

وبعد حساب مفصل نجد:

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_e} + 2\left\{\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right\} \ldots\ldots(1.50)$$

يسمى الحد الأخير من المعادلة (1.50) بتسارع كريوليس و يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\gamma_c}$:

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\left\{\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right\} \ldots\ldots(1.51)$$

ومنه تكون عبارة التسارع المطلق:

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.52)$$

إذا كانت حركة الجملة $(R')(O'x'y'z')$ إنسحابية فقط وتوافق حركة مستقيمة منتظمة بالإضافة ل $\frac{d\vec{i'}}{dt'}=\frac{d\vec{j'}}{dt'}=\frac{d\vec{k'}}{dt'}0$:. يكون أيضا $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$ وبالتالي يتساوي التسارعان المطلق والنسبي لان كل من التسارع المكتسب وتسارع كوريوليس ينعدمان:

$$\vec{\gamma}=\vec{\gamma'}.............................(1.53)$$

وبما أن الكتلة مقدار فيزيائي مطلق كما رأينا سابقا من وجهة نظر الميكانيك الكلاسيكي فيمكننا بالاعتماد على العلاقة (1.53) كتابة العلاقة المعبرة عن صمود المبدأ الأساسي للتحريك (مزيدا من التفاصيل في الفصل الثاني) أثناء الانتقال من جملة غاليلية لأخرى:

$$\vec{F}=\vec{F'}...................................(1.54)$$

حيث أن $\vec{F}$ و $\vec{F'}$ تمثلان القوة المطبقة المطلقة و النسبية على M بالنسبة للجملتين (R) و(R') من وجهة نظر الميكانيك الكلاسيكي على التوالي وبالتالي يمكننا القول بأن قوانين الميكانيك الكلاسيكي صامدة بتحويلات غاليلي أي أن الصيغة الرياضية لعبارة القوة تكون نفسها في كل معالم العطالة.

تسارع كوريوليس:

تحقق القاعدة الديكارتية $\left(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\right)$ للمعلم النسبي $(R')(O'x'y'z')$ من وجهة نظر الميكانيك الكلاسيكي بإعتبارها تتحرك حركة دورانية بسرعة زاوية $\overrightarrow{w_e}$ العلاقات التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{i'}}{dt'} = \overrightarrow{w_e} \wedge \vec{i'} \\ \dfrac{d\vec{j'}}{dt'} = \overrightarrow{w_e} \wedge \vec{j'} \quad \text{.........}(1.55) \\ \dfrac{d\vec{k'}}{dt'} = \overrightarrow{w_e} \wedge \vec{k'} \end{cases}$$

وعليه تصبح عبارة تسارع كوريوليس كما يلي:

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\left\{\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right\}$$

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\left\{\frac{dx'}{dt}\overrightarrow{w_e} \wedge \vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{w_e} \wedge \vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{w_e} \wedge \vec{k'}\right\}$$

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\left\{\overrightarrow{w_e} \wedge \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right)\right\}$$

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\overrightarrow{w_e} \wedge \overrightarrow{v_r} \quad \text{.......................................}(1.56)$$

من خلال ملاحظتنا للعبارة (1.56) نلاحظ أن تسارع كوريوليس يمكن أن ينعدم في ثلاث حالات:

- إذا كان شعاع السرعة الزاوية معدوم $\overrightarrow{w_e} = 0$.
- السرعة النسبية معدومة.
- السرعة النسبية موازية لشعاع السرعة الزاوية.

ومنه تكون عبارة التسارع المطلق:

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_e} + 2\overrightarrow{w_e} \wedge \overrightarrow{v_r} \qquad (1.57)$$

دراسة الحركة النسبية في حالة الحركتين الدورانية والانسحابية للجملة النسبية:

لتكن لدينا جملتان عطاليتان $(R)(Oxyz)$ و $(R')(O'x'y'z')$ وفي اللحظة $t = t' = 0$ مبدأيهما منطبقان $(O \equiv O')$ بحيث تتحرك الجملة (R') بالنسبة لـ : (R) حركة مستقيمة منتظمة بالسرعة الثابتة $\vec{V}$ بالإضافة لحركة دورانية بالسرعة الزاوية $\overrightarrow{w_e}$. يكون قانون تركيب السرعات والتسارعات كما يلي:

$$\begin{cases} \vec{V}_a = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} \\ \overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_e} + 2\overrightarrow{w_e} \wedge \overrightarrow{v_r} \end{cases}$$

حيث أن:

$$\begin{cases}\vec{V}_a = \left\langle \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\rangle_R \\ \overrightarrow{v_r} = \left\langle \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt'} \right\rangle_{R'} = \dfrac{dx'}{dt'}\vec{i}' + \dfrac{dy'}{dt'}\vec{j}' + \dfrac{dz'}{dt'}\vec{k}' \\ \overrightarrow{v_e} = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\dfrac{d\vec{i}'}{dt'} + y'\dfrac{d\vec{j}'}{dt'} + z'\dfrac{d\vec{k}'}{dt'} \\ \overrightarrow{\gamma_a} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \\ \overrightarrow{\gamma_r} = \dfrac{d^2x'}{dt'^2}\vec{i}' + \dfrac{d^2y'}{dt'^2}\vec{j}' + \dfrac{d^2z'}{dt'^2}\vec{k}' \\ \overrightarrow{\gamma_c} = 2\left\{ \dfrac{dx'}{dt}\dfrac{d\vec{i}'}{dt} + \dfrac{dy'}{dt}\dfrac{d\vec{j}'}{dt} + \dfrac{dz'}{dt}\dfrac{d\vec{k}'}{dt} \right\} = 2\overrightarrow{w_e} \wedge \overrightarrow{v_r} \end{cases} \quad ......(1.57)$$

المسافة الكلاسيكية في الميكانيك الكلاسيكي:

لتحديد المسافة الكلاسيكية بين نقطتين ماديتين كيفيتين M_1 و M_2 بالنسبة للجملة الغاليلية (R) ننطلق من العبارة الشعاعية التالية لشال:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

وبالتالي تصبح قيمة المسافة الكلاسيكية كمايلي:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots(1.58)$$

بإعتبار أن قوانين الميكانيك الكلاسيكي صامدة أثناء الانتقال من معلم عطالي لآخر تكون عبارة هذه المسافة بين نفس النقطتين بالنسبة للجملة الغاليلية (R') تعطى كمايلي:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left[(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.59)$$

لنطبق تحويلات غاليلي على عبارة المسافة المعبر عنها في العلاقة (1.58) نجد بسهولة أن:

$$\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \ldots(1.60)$$

من الواضح أن عبارة المسافة من وجهة نظر الميكانيك الكلاسيكي المعرفة حسب العلاقة (1.58) مستقلة عن الزمن وصامدة بتحويلات غاليلي.