1 ELEMENTS DE LOGIQUE

1.1 ELEMENTS DE LOGIQUE

Définition: On appelle "**proposition logique**" toute assertion à laquelle on peut répondre sans ambiguïté, sans hésitation, ni information complémentaire par "*vrai*" ou "*faux*".

Toute proposition logique P admet une négation (notée $nonP$). Si une proposition P est vraie, alors sa négation $(nonP)$ est fausse. Inversement, si P est fausse alors sa négation $(nonP)$ est vraie. P et $(nonP)$ ne sont jamais toutes les deux vraies simultanément. On peut associer à ce qui précède une table de vérité comme suit.

P	$nonP$
V	F
F	V

Une table de vérité

1.1.1 CONNECTEURS LOGIQUES

Dans les raisonnements logiques, on utilise à la fois plusieurs propositions qui sont reliées entre elles par des relations particulières appelées "**connecteurs logiques**". Il en existe quatre principaux. Soient P et Q deux propositions logiques, on a alors :

1) Connecteur de conjonction quand on a : P et Q noté : $P \wedge Q$

2) Connecteur de disjonction quand on a : P ou Q noté : $P \vee Q$

3) Implication quand P entraîne Q, notée : $P \Rightarrow Q$

4) Equivalence logique si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ notée : $P \Leftrightarrow Q$.

On associe à ces quatre connecteurs logiques le tableau suivant.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Exemples :

a) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (nonP \vee Q)$

b) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (nonQ \Rightarrow nonP)$

Le second membre de la dernière équivalence est appelée : "**la contraposée**" de l'implication $(P \Rightarrow Q)$.

c) $non\ (P \wedge Q) \Leftrightarrow (nonP) \vee (nonQ)$

d) $non\ (P \vee Q) \Leftrightarrow (nonP) \wedge (nonQ)$.

1.1.2 RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE.

Soient P et Q deux propositions logiques. Comme $(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à $(nonP \vee Q)$ le raisonnement sur l'une ou l'autre est identique.

Puisque $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (nonP \vee Q)$ (1)

Alors $non\ (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow non\ [(nonP \vee Q)]$

$non\ (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge (nonQ)$ (2)

Le fait de prouver que la relation (1) est vraie, revient donc à montrer que (2) est fausse. Parfois, il est plus pratique de choisir P vraie et de supposer Q fausse, autrement dit $(nonQ)$ vraie. Si on aboutit à une contradiction, cela signifie que $[P \wedge (nonQ)]$ est une proposition fausse. On déduit alors que l'implication initiale $(P \Rightarrow Q)$ est vraie. Une telle approche est appelée: "**raisonnement par l'absurde**".

Dans la plupart des raisonnements mathématiques, on est souvent amené à prouver des implications logiques. La preuve d'une implication donnée peut s'effectuer par l'une des trois méthodes suivantes:

i) raisonnement direct,

ii) l'aide de la contraposée,

iii) ou raisonnement par l'absurde.

EXERCICES 1.A *(Eléments de Logique) Corrigé page* **242**

1. Montrer que le produit de deux nombres entiers consécutifs est toujours un nombre pair.

2. Montrer que le produit de trois nombres entiers consécutifs est un multiple de 3.

3. Un étudiant affirme que l'expression $n^2 + n + 11$ est un nombre premier pour tout entier positif n. Montrer que cette assertion est fausse.

4. On dit que trois nombres entiers a, b et c forment un triplet Pythagorien s'ils satisfont la relation : $a^2 + b^2 = c^2$.

i) Etant n supérieur à 1, montrer que $2n$, $n^2 - 1$ et $n^2 + 1$ forment un triplet Pythagorien.

ii) 20 et 21 sont deux nombres d'un triplet Pythagorien. Trouver le troisième.

5. Soient P, Q deux propositions logiques. Supposons P fausse et $(P \Rightarrow Q)$ vraie.

a) Peut-on déduire que Q est vraie ?

b) Montrer que $[P \wedge (nonQ)] \Rightarrow Q$ est vraie.

6. Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

7. Soit n un nombre entier. Montrer que le reste de la division de n^2 par 4, est toujours égal à 0 si n est pair, ou à 1 si n est impair.

8. Montrer que le reste de la division par 12, de la somme des carrés de trois nombres entiers consécutifs est toujours égal à 2, ou à 5.

9. Montrer que si un nombre entier $n \geq 2$, est non divisible par aucun entier m, où $2 \leq m \leq \sqrt{n}$, alors n est un nombre premier.

10. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, les implications suivantes :

a) (gof) injective $\Rightarrow$ f injective

b) (gof) surjective et g injective $\Rightarrow$ f injective.

1.2 ELEMENTS DE LA THEORIE DES ENSEMBLES

Définition: Un "**ensemble**" E est une collection d'éléments satisfaisant une même propriété. E est dit "ensemble vide" (noté $\varnothing$) s'il ne contient aucun élément. On appelle "**cardinal**" d'un ensemble E (noté $|E|$), le nombre d'éléments de E .

La relation définie entre l'ensemble E et ses éléments, est l'appartenance qu'on note : $x \in E$; c'est une proposition logique pouvant être vraie ou fausse et sa négation est notée : $x \notin E$.

On dit que F est inclus dans E (une partie, ou sous-ensemble de E), si tout élément de F est aussi un élément de E . Soient A et B deux sous-ensembles de E , on définit les quatre opérations suivantes :

1) L'intersection $A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$

2) La réunion $A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A \vee x \in B\}$

3) L'inclusion $A \subset B = \{x \in E \,/\, x \in A \Rightarrow x \in B\}$

4) L'égalité $(A = B) = \{x \in E \,/\, x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$.

1.2.1 NOTION DE COMPLEMENTAIRE

Définition : Soient A et B deux sous-ensembles de E . Dire que x n'appartient pas à A (noté $x \notin A$) revient à dire que x appartient au "**complémentaire**" de A dans E , noté: $C_E A$.

$$non\ (x \in A) \Leftrightarrow x \in C_E A$$

De ce fait, on déduit le résultat suivant :

$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$.

EXERCICES 1.B *(La théorie des ensembles) Corrigé page* **244**

1. Montrer les équivalences suivantes:

a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.

b) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.

2. Etablir les égalités suivantes:

a) $A \setminus B = C_A(A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$

b) $A \cup B = (A \setminus B) \cup B = (B \setminus A) \cup A$.

3. Montrer que:

a) $[(A \cap B) \subset (A \cap C)$ et $(A \cup B) \subset (A \cup C)] \Rightarrow B \subseteq C$

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \cap (A \setminus C)$.

4. Soit f une application de E dans F. Considérons A et R deux parties respectivement de E et F. On définit l'image directe de A par : $f(A) = \{y \in F \,/\, \exists x \in E, f(x) = y\}$ et l'image réciproque de R par : $f^{-1}(R) = \{x \in E \,/\, f(x) \in R\}$.

Soient A, B, C et I des parties de E ; et J, T, U et V des parties de F. Montrer les relations suivantes.

a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$

b) $I = A \cap B \Rightarrow f(I) \subset f(A) \cap f(B)$

c) $A = B \cup C \Rightarrow f(A) = f(B) \cup f(C)$

d) $U \subset V \Rightarrow f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$

e) $J = U \cap V \Rightarrow f^{-1}(J) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

5. Soit E l'ensemble des parties finies de IN. On définit une fonction f de E dans IN par :

$$\forall A \in E,\ A \neq \varnothing \quad f(A) = \sum_{i \in A} i \qquad \text{et} \qquad f(\varnothing) = 0\,.$$

a) Soit $A_n = \{1,2,3,\ldots\ldots, n\}$. Calculer $f(A_n)$.

b) f est-elle surjective ou injective?

c) Trouver le cardinal de $f^{-1}(6)$.

1.3 L'ENSEMBLE IR

L'ensemble IR des nombres réels est un corps totalement ordonné, contenant Q l'ensemble des nombres rationnels, comme un sous-corps ordonné.

1.3.1 IR ET LA RELATION D'ORDRE $\leq$.

La valeur absolue de x est définie par $|x| = \max\{-x, x\}$ pour tout $x \in IR$. Les propriétés de la valeur absolue sont :

a) $\forall x \in IR$, $|x| \geq 0$. D'où $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

b) $\forall x , y \in IR$ $|x - y| = |y - x|$ (Symétrie)

c) $\forall x , y \in IR$ $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Inégalité triangulaire)

d) $\forall x \in IR$, $\forall a > 0$, $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

De même, on a : $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a)$ or $(x \geq -a)$.

Notons que l'inégalité stricte (<) n'est pas une relation d'ordre.

$\forall x \in IR$, $\forall a > 0$, $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.

De même, on a : $|x| > a \Leftrightarrow (x > a)$ or $(x > -a)$.

Définitions: **(Majorant, minorant)**

Soient m et M deux nombres réels quelconques et A une partie non vide de IR . On dit que le nombre M est un **majorant** de A (ou encore A est majorée par M) si $\forall x \in A$, $x \leq M$. On dit que le nombre m est un **minorant** de A (ou encore A est minorée par m) si $\forall x \in A$, $m \leq x$.

Si la partie A est à la fois minorée et majorée alors A est dite **bornée**.

Si A est majorée par M et $M \in A$ alors M est le plus grand élément de A (noté $\max(A)$).

Si A est minorée par m et $m \in A$ alors m est le plus petit élément de A (noté $\min(A)$).

Définitions: **(Bornes inférieure, supérieure)**

Soient m et M deux nombres réels quelconques et A une partie non vide de IR. On appelle "**borne supérieure**" de A, notée: Sup (A), le plus petit majorant (s'il existe) de A.

On appelle "**borne inférieure**" de A, notée: Inf (A), le plus grand minorant (s'il existe) de A.

Proposition 1: Si une borne existe, alors elle est unique.

Exemple : Si $A = [0,1[$ alors $Sup(A) = 1$ et $Inf(A) = 0$. Notons que $\max(A)$ n'existe pas, par contre $\min(A)$ existe et $\min(A) = 0$.

Proposition 2: Toute partie non vide majorée (*resp.* minorée) de IR, admet une borne supérieure (*resp.* inférieure).

Proposition 3: Soient m et M deux nombres réels et A une partie non vide bornée de IR. Alors

$M = Sup(A) \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \leq M$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / M - \varepsilon < x \leq M.$$

$m = Inf\,(A) \Leftrightarrow \forall x \in A\,,\ m \leq x$ et

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists x \in A \,/\, m < x \leq m + \varepsilon\,.$$

1.3.2 ELEMENTS DE TOPOLOGIE DE IR

Définitions: Soient a et b deux nombres réels tels que : $a < b$.

a) On appelle **intervalle ouvert** de IR d'extrémités a et b , l'ensemble $]a,b[= \{x \in IR \,/\, a < x < b\}$.

b) On appelle **intervalle fermé (ou segment)** de IR d'extrémités a et b , l'ensemble $[a,b] = \{x \in IR \,/\, a \leq x \leq b\}$.

c) On appelle "**intervalle ouvert**" de centre a , tout intervalle de type : $]a - h, a + h[= \{x \in IR \,/ |x - a| < h\}$.

d) On appelle "**intervalle fermé**" de centre a , tout intervalle de type : $[a - h, a + h] = \{x \in IR \,/ |x - a| \leq h\}$.

Il existe aussi des intervalles non bornés tels que $]a,+\infty\,[$ ou $]-\infty, b]$.

Définition : Une partie V non vide de IR est dite "**voisinage**" du point a de IR , s'il existe un intervalle ouvert contenant a , inclus dans V , ou encore s'il existe $h > 0$ tel que $]a - h, a + h[\subset V$.

Un intervalle ouvert est donc un voisinage de chacun de ses points.

Notons $V(a)$ l'ensemble de tous les voisinages d'un point a , $V(a)$ vérifie :

1) $\forall h > 0$, les intervalles $]a - h, a + h[$ et $[a - h, a + h]$ sont des voisinages de a.

2) L'intersection de deux voisinages de a, est aussi un voisinage de a.

3) Toute partie de IR contenant un voisinage de a, est aussi un voisinage de a. En particulier, la réunion de plusieurs voisinages de a est aussi un voisinage de a.

Définitions: Soit A une partie non vide de IR.

1) Un nombre réel a est dit "**point adhérent**" à A si tout voisinage de a, contient au moins un élément de A.

2) On appelle "**l'adhérence**" de A, notée : $\bar{A}$, l'ensemble de tous les points adhérents à A.

Exemples : $A =]0,1]$; $B =]0,1[$ et $C = [0,1[\cup \{2\}$.

$\overline{A} = [0,1]$; $\overline{B} = [0,1]$ et $\overline{C} = [0,1] \cup \{2\}$.

Il est clair que toute partie A de IR, est incluse dans son adhérence $\overline{A}$, puisque tout élément de A est un point adhérent à A.

Définitions: Soit A une partie non vide de IR.

1) A est dite "**dense**" dans IR si $\overline{A} = IR$.

2) A est dite "**fermée**" si $\overline{A} = A$.

3) A est dite "**ouverte**" si $\overline{A}$ est le complémentaire d'une partie fermée de IR.

Les ensembles $\varnothing$ et IR sont à la fois des ouverts et des fermés.

Soit a un élément quelconque de $\overline{A}$:

i) ou bien, il existe un voisinage V de a, $(V \cap A = \{a\})$ et donc a appartient nécessairement à A. Dans ce cas, a est appelé "**point isolé**" de A.

ii) ou bien, tout voisinage V de a, $(V - \{a\}) \cap A \neq \varnothing$, et dans ce cas, a est appelé "**point d'accumulation**" de A.

Exemple : $C = [0,1[\cup\{2\}$; $\overline{C} = [0,1] \cup \{2\}$. 2 est un point isolé de C. Tout élément de [0,1] est un point d'accumulation de C.

EXERCICES 1.C *(L'ensemble IR) Corrigé page* **245**

1. Déterminer la borne supérieure, la borne inférieure et le plus grand (*resp.* petit) élément des parties de IR suivantes:

a) A = [2, 3[B = [1, 2[$\cup$ [4, 5] $C = \{-\frac{1}{x} / 1 \leq x \leq 2\}$

b) $D = \{\frac{1}{x} / 1 < x < 2\}$ $E = \{2 + \frac{1}{n} / n \in IN^*\}$

c) $F = \{u_n / u_n = \sup\left(\pi + \frac{1}{n}, \frac{n+2}{n}\right), n \in IN^*\}$.

2. Soient a, b deux nombres réels quelconques. Montrer que :

i) $Sup\,(a,b) = \max(a,b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$

ii) $Inf\,(a,b) = \min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

3. Soit A une partie majorée de IR, et M l'ensemble des majorants de A.

a) Montrer que M est minoré, puis comparer $Inf\,(\mathrm{M})$ et $Sup\,(A)$.

b) Montrer que $Sup\,(A)$ appartient à A si et seulement si A possède un plus grand élément.

4. Soit A une partie non vide de IR.
On désigne par $(-A) = \{-x \,/\, x \in A\}$. Montrer si A est bornée alors
$Sup\,(-A) = -Inf\,(A)$ et $Inf\,(-A) = -Sup\,(A)$.

5. Soient E et F deux parties non vides de IR, avec $E \subset F$. Montrer que si F est bornée, alors E est bornée, de plus, $Sup\,(E) \leq Sup\,(F)$ et $Inf\,(F) \leq Inf\,(E)$.

6. Soient E et F deux parties non vides, bornées de IR.

a) Montrer que si $E \cap F \neq \phi$, alors $E \cap F$ est bornée, et de plus, $Sup\,(Inf\,(E), Inf\,(F)) \leq Inf\,(E \cap F)$ et

b) $Inf\,(E \cap F) \leq Sup\,(E \cap F) \leq Inf\,(Sup\,(E), Sup\,(F))$.

c) Montrer que si $E \cup F$ est bornée, alors on a :
$Sup\,(E \cup F) = Sup\,(Sup\,(E), Sup\,(F))$ et
$Inf\,(E \cup F) = Inf\,(Inf\,(E), Inf\,(F))$.

7. Soit E une partie non vide, bornée de IR. On désigne par

$A = \{|x| / x \in E\}$.

a) Montrer que A est bornée.

b) $Sup\,(A) = \max(\,|Inf\,(E)|, |Sup\,(E)|\,)$.

c) $0 \leq Inf\,(A) \leq \min(\,|Inf\,(E)|, |Sup\,(E)|\,)$.

d) Trouver deux Exemples de (c) avec égalité.

8. Trouver $Sup\,(A)$ et $Inf\,(A)$ de la partie $A = \{\frac{1}{n} + (-1)^n \,/\, n \in IN^*\}$.

9. Soit E une partie non vide de IR. On définit $A = \{x \in IR \,/\, x^2 \in E\}$.

Montrer que si E est bornée, alors A est aussi bornée, et de plus on a

$Sup\,(A) = \sqrt{Sup\,(E)}$ et $Inf\,(A) = \sqrt{Inf\,(E)}$.

10. Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_n$ des nombres strictement positifs. Soient $m = \min\{\, a_i / 1 \leq i \leq n\}$ et $M = \max\{\, a_i / 1 \leq i \leq n\}$.

a) Montrer que : $$m \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \leq M.$$

b) Montrer que : $$\min\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n} \leq Max\left(\frac{a_i}{b_i}\right).$$

11. Soient A et B deux parties non vides, majorées de IR, on définit l'ensemble $S = A \oplus B = \{x \in IR \,/\, \exists a \in A, \exists b \in B, x = a + b\}$.

a) Montrer que S est majoré et $Sup\,(S) = Sup\,(A) + Sup\,(B)$.

b) Si A et B sont dans $[0, +\infty[$, peut-on avoir un résultat similaire pour l'ensemble $P = A \otimes B = \{x \in IR \,/\, \exists a \in A, \exists b \in B, x = a.b\}$?