الفصل الأول

مفاهيم وخصائص عامّة

1.1 المسافة

1.1.1 تعريف

لتكن E مجموعة كيفيّة غير خالية.

نسمّي مسافة على E كلّ تطبيق d معرّف من $E \times E$ نحو $\mathbb{R}_+$ ومحقّق الشروط الثلاثة التالية:

ش$_1$: $d(x,y)=0 \;\Leftrightarrow\; x=y$

ش$_2$: $\forall x,y \in E \;\; d(x,y)=d(y,x)$

ش$_3$: $\forall x,y,z \in E \;\; d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

ونسمّي **فضاء متريًا** كلّ زوج (E,d) مؤلّف من مجموعة كيفيّة E ومسافة d.

2.1.1 ملحوظتان

1) نقول عن التطبيق d إنّه مسافة على E ولكنّه (كتطبيق) معرّف على الجداء $E \times E$.

2) يحمل الشرط الأوّل إسم **المطابقة** والثاني **التناظر** والثالث **المتباينة المثلثيّة**.

3.1.1 أمثلة

1) التطبيق $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ المعطى بـــ:

$$d(x,y)=|x-y|,$$

مسافة على $\mathbb{R}$ ، تدعى بالمسافة **الاعتياديّة**.

2) التطبيق:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$$
$$(x,y)\mapsto d'(x,y)=|x+y|,$$

لا يعرّف مسافة على $\mathbb{R}$ ، إنّه ينعدم على المنصّف الثاني $y=-x$ ، وهو ما يلغي شرط المطابقة.

3) التطبيق $d:E\times E\to\mathbb{R}_+$ المعطى بـــ:

$$d(x,y)=\begin{cases}1\ ;\ x\neq y,\\ 0\ ;\ x=y,\end{cases}$$

مسافة على E ، تدعى بالمسافة **الإنقطاعيّة**. إنّ ذلك راجع إلى كونها تضفي على بنية الطبولوجيا الانقطاعيّة، كما سنرى.

4) إذا كانت d مسافة على مجموعة E فإنّ التطبيقات:

أ. $\alpha d\ (0<\alpha)$ ، ب. $\dfrac{d}{1+d}$ ، ج. $\inf(1,d)$

تضحى مسافات على E .

نودّ قبل الاسترسال في سرد أمثلة أخرى، التوقّف عند هذه الـــ:

4.1.1 قضية

مهما تكن العناصر x و y و z من فضاء متريّ (E,d) لدينا:

$$|d(x,z)-d(y,z)|\leq d(x,y).$$

إثبات

وبالفعل، فإنّ استنادنا إلى (ش3) يسمح لنا بكتابة:

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z),$$

ومنه:

$$d(x,z) - d(y,z) \le d(x,y). \qquad (*)$$

ومن جهة أخرى، وللعلّة نفسها لدينا:

$$d(y,z) \le d(y,x) + d(x,z).$$

ومنه:

$$d(x,y) \le d(x,z) - d(y,z). \qquad (**)$$

إذا ضممنا (*) إلى (**) كنّا قد بلغنا المطلوب.

لنمض الآن في سرد أمثلة أخرى.

5.1.1 أمثلة

المسافات الأساسية على $\mathbb{R}^n$ و $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

نعمد إلى الإتيان بهذه المسافات بالتوازي، الأولى تعني $\mathbb{R}^n$ والموالية تخصّ $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. ولكن ما هو $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$؟

إنّه الفضاء الشعاعيّ المؤلّف من الدوال الحقيقيّة المستمرّة المنطلقة من المجال الحقيقيّ $[a,b]$.

1) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ ؛ $d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$

2) $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ؛ $d_2(f,g) = \left(\int_a^b \left(f(t) - g(t) \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$

$$d_\infty(x,y)=\sup_{1\le i\le n}\left(|x_i-y_i|\right) \quad ; \quad d_\infty(f,g)=\sup_{t\in[a,b]}\left(|f(t)-g(t)|\right) \qquad (3$$

تحمل المسافة d_2 تسمية **المسافة الإقليديّة**، بينما اُشتُهرت d_∞ تحت تسمية **مسافة التقارب المنتظم**. سيكون لهذه المسافة شأن كبير في الفصل الرابع القادم.

6.1.1 ملحوظة

نستخلص من الأمثلة السابقة أنّه **يمكن جعل مجموعة ما فضاء متريّا بطرق شتّى**؛ وهو أمر أبرزنا مثله في الفضاءات الطبولوجيّة حينما رأينا تعدّد واختلاف طرق إنشاء طبولوجيات على مجموعة ما.

لنبيّن أنّ التطبيقين الواردين في (4. ب) من (3.1.1) و2 (حالة $\mathbb{R}^n$) من (5.1.1) يعرّفان مسافتين. لن نهتمّ بطبيعة الحال، وسيكون هذا دأبنا على مدار هذا الفصل، إلاّ بالتأكّد من توفّر المتباينة المثلّثيّة، وذلك لسهولة التحقّق من الشرطين الآخرين عموما. لنبرهن إذن، هاتين المتباينتين:

1) إذا كان (E,d) فضاء متريّا فإنّ:

$$\forall x,y,z\in E \quad \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\le\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}.$$

$$\forall x=(x_i)_{1\le i\le n},\ y=(y_i)_{1\le i\le n},\ z=(z_i)_{1\le i\le n}\in\mathbb{R}^n \qquad (2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

بخصوص المتباينة (1)، نلاحظ في الوهلة الأولى أنّه لدينا على التوّ:

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=1-\frac{1}{1+d(x,y)}.$$

ومنه:

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq 1-\frac{1}{1+d(x,z)+d(z,y)},$$

وهذا بفعل المتباينة المثلّثية التي تحقّقها المسافة d. بتوحيد المقامات نحصل على:

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)}+\frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}.$$

وعليه، يأتي المطلوب:

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}.$$

لنضع قصد تبيان المتباينة (2)، $a_i=x_i-z_i$ و $b_i=z_i-y_i$ حيث i من $\{1,2,...n\}$. تصبح العلاقة المطلوبة بذلك:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

وبرفع طرفي هذه المتباينة إلى المربّع يأتي، بعد اختزال:

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

هكذا نكون قد أرجعنا مشكلتنا إلى إثبات المتباينة الأخيرة. إنّ هذه المتباينة الجديدة مشهورة في الأدب الرياضيّاتيّ. إنّها تحمل اسم متباينة:

كوشي[2] ــ شوارز[3] وتبيّن بدورها كما يلي:

من أجل كلّ λ من $\mathbb{R}$ نضع:

$$P(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-\lambda b_i)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\right)\lambda^2-\left(2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\lambda+\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}.$$

نلاحظ أنّ هذا الثلاثي الحدود (إزاء λ) موجب دوما. وعليه، فإنّ مميّزه سالب. نكتب إذن:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\ \sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\leq 0,$$

وهو ما يوصل مباشرة إلى المطلوب.

يمكننا في الواقع الإتيان بمسافة أساسيّة ذات شكل أعمّ من تلك التي وردت في (1) و(2) من (5.1.1) ونعني بذلك:

مسافة هولدر[4]:

أ. على $\mathbb{R}^n$: $d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i-y_i|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$

---

2. Augustin Louis Cauchy: رياضياتيّ فرنسيّ. ولد في 21 أوت 1789 بباريس ومات في 23 ماي 1857 بصو. يعتبر الرياضيّاتيّ الفرنسيّ الأغزر إنتاجا. تنطوي أعماله العلميّة على أزيد من 800 بحثا في مواضيع متنوّعة في الرياضيات والفيزياء. له باع طويل في تأسيس التحليل الرياضيّاتيّ الحديث.

3. Hermann Amandus Schwarz: رياضياتيّ نمساويّ. ولد في 25 جانفي 1843 بهرمسدورف (بولونيا الحالية) ومات في 30 نوفمبر 1921 ببرلين. درس الكيمياء ثمّ الرياضيات تحت تأثير فيرشتراس. يحتفظ له التاريخ بمتراجحته في التكاملات.

4. Otto Ludwig, Hölder: رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 22 ديسمبر 1859 بشتوتقارت ومات في 29 أوت 1937 بليبزيف. له نتائج كثيرة في التحليل الدالّي والمنطق والبنى الجبريّة. اكتشف المتراجحة الحاضرة المقترنة باسمه عام 1884.

ب. على $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$: $d_p(f,g)=\left(\int_a^b(|f(t)-g(t)|)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$

حيث p عدد حقيقيّ مقيّد بالشرط $1\leq p$.

من الواضح أنّ المسافات السابقة تمثّل حالات خاصة لهذه، التي نأتي ببرهانها لاحقا (التمرين 7 المحلول).

7.1.1 تعريف

ليكن A جزءا غير خال من فضاء متريّ (E,d). إنّ مقصور d على $A\times A$ يشكّل مسافة على A. تسمّى هذه المسافة **المسافة الأثر** على A ويسمّى الزوج $(A,d/A)$ **الفضاء المتريّ الجزئيّ**.

2.1 الطبولوجيا الملحقة بمسافة

1.2.1 تعريف

ليكن (E,d) فضاء متريّا. نسمّي **كرة مفتوحة** مركزها a من E **ونصف قطرها** $0<r$ المجموعة الجزئيّة المرموز لها بـــ $B(a,r)$ والمعرّفة على النحو:

$$B(a,r)=\{x\in E/d(a,x)<r\}.$$

وبالمثل، نسمّي **كرة مغلقة** مركزها a ونصف قطرها $0<r$ الجزء التالي: $B_f(a,r)$

$$B_f(a,r)=\{x\in E/d(a,x)\leq r\}.$$

أخير، نسمّي **غلافا كرويّا** مركزه a من E ونصف قطره $0<r$ الجزء $S(a,r)$ المعرّف بـــ:

$$S(a,r)=\{x\in E/d(a,x)=r\}.$$

ينجم عن هذا التعريف على التوّ أنّ:

$$B_f(a,r)=B(a,r)\cup S(a,r).$$

2.2.1 أمثلة

1) في $\mathbb{R}$، تتساوى المسافات الأساسيّة الثلاث المذكورة آنفا ويكون لدينا:

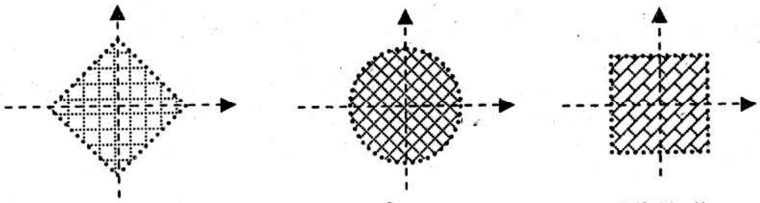
$$B(a,r)=]a-r,a+r[;\ B_f(a,r)=[a-r,a+r];$$
$$S(a,r)=\{a-r,a+r\}.$$

2) لنمثّل هندسيّا **كرات الوحدة** $B_f^1(0,1)$ و $B_f^2(0,1)$ و $B_f^\infty(0,1)$ في $\mathbb{R}^2$، الذي نزوّده بالمسافات d_1 و d_2 و d_∞ الأساسيّة على الترتيب. نحصل على:

$$\begin{aligned}B_f^1(0,1)&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|x|+|y|\le 1\}\\&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x+y\le 1;\ x\ge 0,y\ge 0\}\cup\\&\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-x-y\le 1;\ x\le 0,y\le 0\}\\&\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-x+y\le 1;\ x\le 0,y\ge 0\}\\&\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x-y\le 1;\ x\ge 0,y\le 0\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_f^2(0,1)&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\sqrt{x^2+y^2}\le 1\right\}\\&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\le 1\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_f^{\infty}(0,1) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, Max\left(|x|,|y|\right)\le 1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, |x|\le 1;\ |y|\le 1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/ -1\le x\le 1;\ -1\le y\le 1\right\} \end{aligned}$$



$B_f^1(0,1)$ $\quad$ $B_f^2(0,1)$ $\quad$ $B_f^{\infty}(0,1)$

3) إذا كان E مزوّدا بالمسافة الإنقطاعيّة الواردة في المثال (2) من (3.1.1) حصلنا على:

$B_f(a,r)=B(a,r)=\{a\}$ و $S(a,r)=\phi$ لمّا $1>r$.

$B(a,r)=\{a\}$ و $B_f(a,r)=E$ و $S(a,r)=E\setminus\{a\}$ لمّا $1=r$.

$B_f(a,r)=B(a,r)=E$ و $S(a,r)=\phi$ لمّا $1<r$.

ما من شكّ أنّ هذه الأمثلة أظهرت **أنّ للكرات أشكالا متنوّعة**، بدءا من أحاديات العناصر إلى الفضاء بأكمله وهي، من جهة أخرى، **بعيدة عن المعنى " الأدبيّ" الذي لا يزال معلّقا في أذهان بعض المبتدئين.**

3.2.1 تعريف

ليكن (E,d) فضاء متريّا و A جزءا منه. نقول عن A إنّه **مفتوح** إذا كان خاليا أو محقّقا الخاصية التالية:

$$\forall x\in A\ \exists r>0 \,/\, B(x,r)\subset A.$$

ونقول عنه إنّه **مغلق** إذا كانت متمّمته مفتوحة.

من المثير للانتباه أنّ هذا التعريف لم يحد عن ذاك الذي وضع لتعريف المفتوح في طبولوجيا $\mathbb{R}$ الاعتياديّة سوى باستبدال لفظ مجال بلفظ كرة. في الواقع، واستنادا إلى المثال (1) أعلاه، فإنّ التعريف المشار إليه هو الذي يمثّل حالة خاصّة لتعريفنا الحالي. إنّ الفضاء $(\mathbb{R},|.|)$ الاعتياديّ عنصر بسيط (على أهميّته) من عائلة الفضاءات المتريّة، حتّى ولو كان تاريخيّا المنطلق لميلاد هذه الفضاءات.

نعكف الآن على إظهار الخصائص الأساسيّة للمفتوحات. لدينا في البداية هذه الـــ:

4.2.1 قضية

كلّ كرة مفتوحة جزء مفتوح.

إثبات

وبالفعل، إذا كانت $B(a,r)$ كرة مفتوحة كتبنا:

$$x \in B(a,r) \quad \Rightarrow \quad d(a,x) < r;$$

وبوضع $r' = r - d(a,x) > 0$ يأتي أنّ:

$$B(a,r') \subset B(a,r),$$

وهو المطلوب.

5.2.1 مبرهنة

إنّ عائلة للمفتوحات في فضاء متريّ (E,d) تؤلّف طبولوجيا على الفضاء ذاته. تشكّل عائلة الكرات المفتوحات **أساسا** لهذه الطبولوجيا.

إثبات

لنرمز للعائلة المذكورة بـ σ ولنبيّن أنّها تحقق مسلّمات هوسدورف[5] الثلاث:

م1: E و ϕ عنصران من σ،

م2: σ مستقرّة إزاء الاتحاد،

م3: σ مستقرّة إزاء التقاطع المنتهي.

لنشر على التوّ إلى أنّ σ تحقّق المسلّمة الأولى إنشاء وبكلّ وضوح. من جهة أخرى، إذا كانت $(\Omega_i)_{i\in I}$ عائلة من مفتوحات من σ فإنّه من أجل كلّ عنصر x من $\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ يوجد دليل i_0 من I بحيث يكون x من Ω_{i_0}. وعليه، يوجد عدد موجب r_x بحيث $B(x,r_x)\subset\Omega_{i_0}$. ومنه:

$$B(x,r_x)\subset\bigcup_{i\in I}\Omega_i.$$

إذن:

$$\bigcup_{i\in I}\Omega_i\in\sigma.$$

نخلص هكذا إلى أنّ العائلة σ مستقرّة بالنسبة إلى عملية الاتّحاد.

بقي أن نتأكّد من أنّ σ تحقّق المسلّمة الثالثة م3. من أجل ذلك نعتبر عنصرين Ω_1 و Ω_2 من σ. نكتب عندئذ:

$$x\in\Omega_1\cap\Omega_2 \;\Rightarrow\; x\in\Omega_1 \;\Rightarrow\; \exists r_1>0 / B(x,r_1)\subset\Omega_1,$$

5. Félix, Hausdorff : رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 8 نوفمبر 1868 ببريسلو ومات في 26 جانفي 1942 ببون. يعتبر أحد مؤسّسي الطبولوجيّة العصريّة. ساهم بشكل فعّال في نظرية الأعداد والتحليل الدالّيّ. له العديد من المؤلفات الفلسفيّة والأدبيّة.

$$x \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \;\Rightarrow\; x \in \Omega_2 \;\Rightarrow\; \exists r_2 > 0 / B(x, r_2) \subset \Omega_2.$$

نستنتج من هاتين العلاقتين أنّ:

$$B(x, min(r_1, r_2)) \subset B(x, r_1) \cap B(x, r_2) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

وعليه، يكون $\Omega_1 \cap \Omega_2$ منتميا إلى σ ؛ وتكون هذه الأخيرة بذلك طبولوجيا على (E,d). إنّ الشطر الأخير من هذه المبرهنة واضح. فليس صعبا أن نرى أنّ كل مفتوح من (E,d) إتّحاد لكرات مفتوحة؛ وما هذا سوى تعميم لما عرفناه على المجالات المفتوحة حين توليدها للطبولوجيا الاعتياديّة لمجموعة الأعداد الحقيقيّة.

يتّضح هكذا، أنّ كلّ فضاء متريّ متمتّع ببنية طبولوجيّة ملحقة بمسافته. يمكن القول هنا بأنّ عكس هذه النتيجة ليس صحيحا عموما. وبعبارة أوضح، يكون من الخطإ الإدّعاء بأنّ طبولوجيا فضاء ما ملحقة بمسافة لزوما. إنّه حال الطبولوجيتين الخشنة والمتّحدة الانتهاء على سبيل المثال. يمكن تبرير ذلك بافتقارهما إلى خاصية الفصل. توجد فوق هذا، طبولوجيات منفصلة لا يمكن إلحاقها بمسافات. فالفضاءات المتريّة تشكّل إذن، عائلة جزئيّة فعليّة من عائلة الفضاءات الطبولوجيّة. تسمّى عائلة الفضاءات، التي تكون طبولوجياتها مستقاة من مسافات، **الفضاءات القابلة لمسافة**. إنّ لها شروطا تميّزها، غير أنّنا لن نذهب في هذا الاتّجاه أبعد من ذكر هذه النتيجة (مبرهنة أُريسون[6]):

---

6. Pavel Samuilovich Uryshon: رياضيّاتيّ روسيّ. ولد في 3 فيفري 1898 بأديسا ومات في 7 أوت 1924 بباتزسورمير (فرنسا). درس الفيزياء ثمّ اهتمّ بالرياضيات. ترك أعمالا ضخمة حول الدوال التكامليّة والمنحنيات والسطوح.

يكون فضاء طبولوجيّ متمتّع بخاصية العدّ الثانية قابلا لمسافة إذا وفقط إذا كان ناظميّا.

6.2.1 ملحوظة

إنّ التعاريف المتعلّقة بمفاهيم المغلق والجوار وأنماط النقاط (الداخليّة والملاصقة والخارجيّة الخ ...) والأساس والجمل الأساسيّة للجوارات والناظميّة والنظاميّة والفصل والكثافة والقابليّة للفصل تظلّ صالحة كما وردت في الطبولوجيا العامّة، لا يمسّ تعديل سوى ما ينجرّ عن توظيف تعريف المفتوح الوارد في (3.2.1). سوف نرى فيما يلي أنّ كثيرا من هذه الصفات تتمتّع بها الفضاءات المتريّة. لا بأس أن نعيد وضع بعض منها للاستئناس بها. ها هي تترى:

ليكن x عنصرا من فضاء متريّ (E,d).

- نسمّي جوار x كلّ جزء V من E بحيث:
$$\exists r>0: B(x,r)\subset V.$$

نرمز، كالعادة وعلى مدار الفصول، لعائلة جوارات x بـــ $\mathscr{V}(x)$.

- x نقطة داخلية لجزء A من E $\Leftrightarrow$ $A\in\mathscr{V}(x)$

نرمز لداخلية A بـــ $\overset{\circ}{A}$. **إنّها جزء مفتوح.**

- x نقطة ملاصقة لجزء A من E $\Leftrightarrow$ $\forall V\in\mathscr{V}(x)\ \ V\cap A\neq\phi$

نرمز لملاصقة A بـــ $\overline{A}$. **إنّها جزء مغلق.**

- x نقطة تراكميّة لـــ A $\Leftrightarrow$ $\forall V\in\mathscr{V}(x)\ \ card V\cap A=+\infty$

نرمز لمجموعة نقاط A التراكميّة بـــ A' ونسمّيها **مشتقّة** A. **إنّها جزء مغلق.**

- x نقطة معزولة لجزء A $\Leftrightarrow$ $\exists V \in \mathscr{V}(x) \;\; V \cap A = \{x\}$
- x نقطة حافويّة لجزء A $\Leftrightarrow$ $x \in \overline{A} \cap \overline{C_E A}$

نرمز لحافّة A بـــ $\mathscr{F}_r(A)$. **إنّها جزء مغلق.**

- x نقطة خارجية لجزء A من E $\Leftrightarrow$ $x \in \overset{\circ}{\widehat{C_E A}}$

نرمز لخارجية A بـــ $E_x(A)$. **إنّها جزء مفتوح.**

- $\mathscr{W}(x)$ جملة أساسيّة لجوارات x

$$\Updownarrow$$

$$\forall V \in \mathscr{V}(x) \; \exists W \in \mathscr{W}(x) \;\; W \subset V$$

- β أساس للطبولوجيا σ $\Leftrightarrow$ $\forall \Omega \in \sigma \; \exists (O_i)_{i \in I} \subset \beta \;\; \Omega = \bigcup\limits_{i \in I} O_i$
- (E,d) منفصل

$$\Updownarrow$$

$$\forall \underset{x \neq y}{x, y} \in E \;\; \exists V_x \in \mathscr{V}(x), W_y \in \mathscr{V}(y) : \; V_x \cap W_y = \phi$$

- A كثيف في (E,d) $\Leftrightarrow$ $\overline{A} = E$
- (E,d) قابل للفصل $\Leftrightarrow$ E يحتوي جزءا قابلا للعدّ وكثيفا فيه.
- (E,d) نظاميّ $\Leftrightarrow$ E منفصل ولكلّ نقطة منه جملة أساسيّة من الجوارات المغلقة.
- (E,d) ناظميّ $\Leftrightarrow$ E منفصل ولكلّ مغلقين غير متقاطع منه جواران غير متقاطعين.
- يتمتّع (E,d) بخاصية العدّ الأولى إذا قبلت فيه كلّ نقطة منه جملة أساسيّة قابلة للعدّ من الجوارات.

• يتمتّع (E,d) بخاصية العدّ الثانية إذا تمتّعت طبولوجياه بأساس قابل للعدّ.

7.2.1 قضية

لكلّ نقطة من فضاء متريّ جملة أساسيّة قابلة للعدّ من الجوارات.

إثبات

لتكن x نقطة من فضاء متريّ (E,d). إنّ العائلة $\sigma=\left(B\left(x,\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تلبّي الغرض.

وفعلا، إذا كان V عنصرا من جماعة الجوارات $\mathscr{V}(x)$ فإنّه يوجد عدد موجب ρ بحيث $B(x,\rho)\subset V$. وبما أنّ $\mathbb{R}$ أرخميديّ[7] فإنّه يوجد عدد طبيعيّ غير معدوم n_0 بحيث $\frac{1}{n_0}<\rho$. وعليه يأتي:

$$B\left(x,\frac{1}{n_0}\right)\subset B(x,\rho)\subset V.$$

8.2.1 نتيجة

كلّ فضاء متريّ نظاميّ.

إثبات

وبالفعل، يكفي أن نلاحظ (مثلا) أنّ:

---

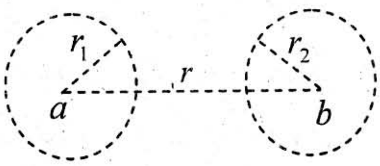
7. نسبة إلى العالم اليونانيّ أرخميدس (Archimède) المولود حوالي 287 قبل الميلاد في سيراكوز (Syracuse) والمتوفى نحو 212. اشتغل بالهندسة والتحليل والفيزياء اشتهر أكثر بمبدإ الدفع الذي يحمل اليوم اسمه.

$$B\left(x,\frac{1}{2n_0}\right)\subset B_f\left(x,\frac{1}{2n_0}\right)\subset B\left(x,\frac{1}{n_0}\right);$$

وتتكفّل القضية أعلاه بالختم بأنّ الجماعة $\left(B_f\left(x,\frac{1}{2n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ جملة أساسيّة من جوارات مغلقة للنقطة x. وعلاوة على هذا، نشير إلى أنّ كلّ فضاء متريّ منفصل كما تبيّنه هذه الـــ:

9.2.1 قضية

كلّ فضاء متريّ منفصل.



إثبات

ليكن a و b عنصرين مختلفين من فضاء متريّ (E,d) ولنضع $d(a,b)=r$.

إذا أخذنا $r_1=\frac{r}{3}=r_2$ (على سبيل المثال) حصلنا على:

$$B(a,r_1)\cap B(b,r_2)=\phi.$$

10.2.1 قضية

كلّ فضاء متريّ متمتّع بأساس قابل للعدّ قابلٌ للفصل.

إثبات

لتكن الجماعة $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أساسا لفضاء متريّ (E,d). من أجل كلّ دليل n نختار عنصرا x_n من Ω_n. إنّ الجزء المؤلّف من هذه العناصر المختارة قابل للعدّ وكثيف.

إنّ لهذه النتيجة عكسا صحيحا. وبعبارة أخرى لدينا:

11.2.6 قضية

كلّ فضاء متريّ قابل للفصل متمتّع بأساس قابل للعدّ.

إثبات

ليكن (E,d) فضاء متريّا و A جزءا قابلا للعدّ وكثيفا في E . نضع:

$$A=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}.$$

نقوم بإثبات أنّ جماعة الكرات المفتوحة $\left(B\left(x_n,\frac{1}{k}\right)\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ تشكّل أساسا لـ E. (إنّها، بطبيعة الحال، مفتوحة وقابلة للعدّ إنشاء).

لنعتبر قصد ذلك، مفتوحا كيفيّا Ω من E ونقطة a من Ω. نريد أن نجد دليلين n_0 و k_0 بحيث:

$$a\in B\left(x_{n_0},\frac{1}{k_0}\right)\subset\Omega.$$

بما أنّ Ω مفتوح فإنّه يوجد عندئذ عدد موجب r بحيث:

$$a\in B(a,r)\subset\Omega.$$

وبحكم كون $\mathbb{R}$ أرخميديّا نضمن وجود عدد طبيعيّ k_0 يفوق تماما $\frac{2}{r}$.

ومادام A كثيفا في E ، فإنّه يوجد دليل طبيعيّ n_0 بحيث $d(a,x_{n_0})<\frac{1}{k_0}$

وهو ما يضمن انتماء a إلى $B\left(x_{n_0},\frac{1}{k_0}\right)$. بقي أن نبيّن أنّ:

$$B\left(x_{n_0},\frac{1}{k_0}\right)\subset B(a,r);$$

ولكن هذا الأمر واضح، إذ لو كان y عنصرا من $B\left(x_{n_0},\frac{1}{k_0}\right)$ لوجدنا:

$$d(a,y) \leq d(a,x_{n_0}) + d(x_{n_0},y) < \frac{2}{k_0} < r;$$

وهو ما ينهي البرهان.

3.1 المسافة بين مجموعتين

1.3.1 تعريف

ليكن (E,d) فضاء متريًا و A و B جزأين منه. نسمّي مسافة A إلى B العدد المرموز له بـــ $d(A,B)$ والمعرّف بـــ:

$$d(A,B) = \inf_{(x,y)\in A\times B} d(x,y).$$

وإذا كان $A = \{a\}$ وضعنا:

$$d(a,B) = \inf_{x\in B} d(a,y).$$

2.3.1 ملحوظات

1) من السهل أن نستخلص من هذا التعريف أنّ:

$$d(B,A) = d(A,B);$$

ومع ذلك، فإنّ **هذا المصطلح لا يتطابق مع مفهوم المسافة** الوارد آنفا. فهو لا يحقّق بالضرورة الشروط المعرّفة للمسافة. فقد يكون $d(A,B)$ معدوما، على سبيل المثال، دون أن يستلزم ذلك تساوي الجزأين A و B كما يتجلّى ذلك من خلال هذا المثال:

نعتبر في الفضاء $(\mathbb{R},|.|)$ الجزأين $A = \left\{\frac{n^2+1}{n^2}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ و $B = \{1\}$.

إنّهما متمايزان ولدينا بشأنهما:

$$d(1,A)=\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\left|1-\frac{n^2+1}{n^2}\right|=\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}=0.$$

2) إذا كان A و B متقاطعين كانت مسافة أحدهما إلى الآخر حينئذ معدومة؛ غير أنّ العكس ليس صحيحا كما يبيّنه المثال أعلاه.

3) نضيف إلى الأسباب التي تحرم المفهوم $d(A,B)$ من أن يكون مسافة عدم تحقّق المتباينة المثلّثيّة عموما. لنضرب لذلك هذا المثال:

ليكن $A=[1,8]$ و $B=[7,11]$ و $C=[10,13]$ ثلاثة أجزاء من $(\mathbb{R},|.|)$. إنّها تحقّق:

$$d(A,C)>d(A,B)+d(B,C),$$

إذ أنّ:

$$d(B,C)=d(A,B)=0,$$
$$d(A,C)=2.$$

3.3.1 قضية

إذا كان A جزءا من فضاء متريّ (E,d) و a نقطة من E فإنّ:

1) $a\in\overline{A} \Leftrightarrow d(a,A)=0$

2) $a\in E_x A \Leftrightarrow d(a,A)>0$

إثبات

لنشر في البداية إلي أنّ النتيجة (2) من هذه القضية نفي منطقيّ للتكافؤ الوارد في البند (1). يكفي إذن، برهان صحّة هذا الأخير.

لزوم الشرط:

$$d(a,A)=0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \ B(a,\varepsilon)\cap A\neq\phi.$$

وبالفعل، فلو وجد عدد $0<\varepsilon_0$ بحيث يكون التقاطع $B(a,\varepsilon_0)\cap A$ خاليا

لتحصّلنا على:

$$d(a,y) \geq \varepsilon_0,\ \forall y \in A.$$

ومنه:

$$d(a,A) = \inf_{y \in A} d(a,y) \geq \varepsilon_0 > 0,$$

وهذا يتنافى والفرض. إذن، a عنصر من $\overline{A}$.

كفاية الشرط:

$$\begin{aligned} a \in \overline{A} &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B(a,\varepsilon) \cap A \neq \phi \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad d(a,A) \leq \varepsilon \Rightarrow d(a,A) = 0. \end{aligned}$$

4.3.1 مبرهنة

كلّ فضاء متريّ ناظميّ.

إثبات

نستهلّ ذلك بذكر النتيجة البسيطة التالية التي لا يختلف برهانها بشيء عن ذاك الذي أوردناه في القضية (4.1.1):

من أجل كلّ جزء غير خال A من فضاء متريّ (E,d) لدينا:

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y), \quad \forall x, y \in E.$$

إذا كان A و B جزأين مغلقين وغير متقاطعين من فضاء متريّ (E,d) فهل يوجد مفتوحان غير متقاطعين Ω_A و Ω_B بحيث $A \subset \Omega_A$ و $B \subset \Omega_B$؟ نردّ على هذا التساؤل بالإيجاب، إذ يكفي من أجل ذلك أخذ:

$$\Omega_A = \{x \in E / d(x,A) < d(x,B)\},$$
$$\Omega_B = \{x \in E / d(x,B) < d(x,A)\}.$$

نلاحظ أنّ Ω_A و Ω_B غير متقاطعين وأنّ $A \subset \Omega_A$ و $B \subset \Omega_B$. بقي أن

نتأكّد من أنّ Ω_A و Ω_B مفتوحان. يكفي اعتبار أحدهما فقط.

ليكن x عنصرا من Ω_A على سبيل المثال. ولنضع:

$$\delta = d(x,B) - d(x,A).$$

لدينا بطبيعة الحال، $0 < \delta$. لنبيّن أنّ Ω_A يحوي الكرة $B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$. ليكن y عنصرا من $B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$. يأتي عندئذ:

$$|d(y,B) - d(y,A) - \delta| = |d(y,B) - d(x,B) + d(x,A) - d(y,A)|.$$

وباستخدام النتيجة المذكورة أعلاه نصل إلى أنّ:

$$|d(y,B) - d(y,A) - \delta| \le 2d(x,y) \le \delta.$$

ينجم عن هذا أنّ:

$$|d(y,B) - d(y,A)| > 0,$$

أي أنّ y ينتمي إلى Ω_A. إنّه المبتغى.

4.1 الأجزاء المحدودة

1.4.1 تعريف

ليكن (E,d) فضاء متريّا و A جزءا منه. نقول عن A إنّه **محدود** إذا وجدت كرة $B(a,\rho)$ (سيّان أكانت مفتوحة أم مغلقة!) مركزها a من E ونصف قطرها $0 < \rho$ بحيث $B(a,\rho) \supset A$. من هنا، يأتي على التوّ أنّ **الكرات ذاتها أجزاء محدودة**. وعلى غرار ذلك، يتبيّن أنّ أحاديات العناصر، بل والأجزاء المنتهية أيضا أجزاء محدودة كما سنراه بعد حين.

2.4.1 تعريف

نسمّي **قطر** جزء غير خال A من فضاء متريّ (E,d) العدد المرموز له بـ $\delta(A)$ والمعرّف بـ:

$$\delta(A)=\sup_{(x,y)\in A^2} d(x,y).$$

3.4.1 مثال

إذا كان $A=B_f(a,\rho)$ فإنّ $2\rho\geq\delta(A)$.

وبالفعل لدينا:

$$\forall x,y\in B(a,r)\quad d(x,y)\leq d(x,a)+d(a,y)\leq 2\rho.$$

وعليه:

$$\delta(A)\leq 2\rho.$$

4.4.1 قضية

لكي يكون جزء A من فضاء متريّ (E,d) محدودا يلزم ويكفي أن يكون قطره منتهيا.

إثبات

إذا كان A محدودا وجدت حينئذ كرة $B(a,r)$ تحويه، طبقا للتعريف (1.4.1). وعليه، فإنّ:

$$\delta(A)\leq 2r<+\infty.$$

وبالعكس، إذا كان $\delta(A)$ منتهيّا أمكننا أن نكتب بوضوح:

$$A\subset B\big(x,\delta(A)\big),\forall x\in A.$$

إذن A محدود.

5.4.1 قضية

إذا كان A و B جزأين غير خاليين من فضاء متريّ (E,d) فإنّ:

1) $A \subset B \;\Rightarrow\; \delta(A) \leq \delta(B)$

2) $A = \{a\} \;\Leftrightarrow\; \delta(A) = 0$ (A أحادي عنصر)

3) A و B محدودان $\Leftrightarrow$ $A \cup B$ محدود.

4) كلّ جزء منته من (E,d) محدود.

5) $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$

إثبات

لن نتعرّض سوى للخاصيتين (3) و(5). البقيّة أبسط وهي متروكة للقارئ.

إنّ الخاصية (1) تضمن صحّة كفاية الشرط الوارد في الخاصية (3). نعتبر بغية تبيان لزوم الشرط، عنصرين a من A و b من B، ونكتب بذلك:

$$\forall x, y \in A \cup B \quad d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y)$$
$$\leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$$

ومنه:

$$d(x,y) \leq \delta(A) + d(A,B) + \delta(B).$$

وفي الأخير، يأتي:

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + d(A,B) + \delta(B).$$

وعليه، يكون $\delta(A \cup B)$ منتهيًا، وهو ما يدلّ على أنّ $A \cup B$ محدود.

بخصوص الخاصية (5) نلاحظ بكلّ بساطة، أنّ $\delta(\overline{A}) \geq \delta(A)$؛ ذلك لأنّ $A \subset \overline{A}$. ومن جهة أخرى، يوجد من أجل كلّ x و y من $\overline{A}$ وكلّ

$\varepsilon > 0$، عنصران x' و y' من A بحيث:

$$d(x,x') \le \frac{\varepsilon}{2};\ d(y,y') \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

وعليه:

$$d(x,y) \le d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) \le \frac{\varepsilon}{2} + \delta(A) + \frac{\varepsilon}{2},$$

أي:

$$\delta(\overline{A}) \le \delta(A) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0,$$

وهو ما يعني أنّ $\delta(\overline{A}) \le \delta(A)$. نحصل هكذا، على المساواة المطلوبة.

لا بدّ أن نشير إلى أنّ الخاصية الأخيرة هذه، لا تخلو من إثارة؛ فمن المنتظر أن يكون $\delta(\overline{A})$ أكبر من $\delta(A)$ ما دام $\overline{A}$ يضمّ عددا من العناصر يفوق عدد عناصر A عموما. غير أنّ الخاصية المذكورة تضمن تساوي القطرين، وهو ما يعني أنّ العناصر المضافة إلى A للحصول على $\overline{A}$ ليس لها تأثير على مفهوم القطر.

5.1 تكافؤ المسافات

1.5.1 تعريف

لتكن d و d' مسافتين معرّفتين على مجموعة E. نقول عن d إنّها **أدقّ** من d' إذا كان كلّ مفتوح بالنسبة إلى d' مفتوحا بالنسبة إلى d.

فعلى سبيل المثال، نرى أنّ المسافة الإنقطاعيّة المعرّفة في المثال (3) من (3.1.1) أدقّ من أيّة مسافة أخرى يمكن تزويد E بها.

بالاحتفاظ بنفس الترميزة نأتي بهذا الـــ:

2.5.1 تعريف

نقول عن d و d' إنّهما **متكافئتان طبولوجيّا** إذا كانت كلّ واحدة منهما أدقّ من الأخرى. وبعبارة أخرى، تكون d و d' متكافئتين إذا كانت مفتوحات E بالنسبة إلى d و d' متطابقة؛ أي أنّهما تولّدان طبولوجيا واحدة.

إنّ هذا المفهوم يتّضح أكثر باستخدام الكرات. من أجل ذلك لدينا:

3.5.1 قضية

تكون مسافة d أدقّ من مسافة أخرى d' إذا وفقط إذا تحقّق ما يلي:
من أجل كلّ x من E، تكون كلّ كرة مفتوحة متمركزة عند x بالنسبة إلى d' محتويّة كرة مفتوحة متمركزة عند x بالنسبة إلى d.

إثبات

لنرمز بـــ $B_d(x)$ و $B_{d'}(x)$ لكرتين مفتوحتين كيفيّتين مركزهما x، نسبة إلى d و d' على التوالي، ولنفترض أنّ d أدقّ من d'. يأتي من التعريف (1.5.1) أنّ $B_{d'}(x)$ تمثّل جزءا مفتوحا بالنسبة إلى d. وطبقا لتعريف المفتوح، فإنّ الكرة $B_{d'}(x)$ تحوي كرة $B_d(x)$.

وبالعكس، إذا كان A مفتوحا غير خال بالنسبة إلى d' و x عنصرا من A فإنّ A يحتوي كرة مفتوحة $B_{d'}(x)$. وبمقتضى الفرض، يتّضح أنّ A يحتوي كرة مفتوحة $B_d(x)$ أيضا. نستنتج من ذلك أنّ A مفتوح بالنسبة إلى d.

4.5.1 نتيجة

نقول عن المسافتين d و d' إنّهما **متكافئتان طبولوجيّا** إذا وفقط إذا احتوت كلّ كرة مفتوحة بالنسبة إلى إحداهما كرة مفتوحة بالنسبة إلى الأخرى وذلك من أجل كلّ x من E ؛ وهو ما يكافئ أيضا أنّ التطبيق المطابق:

$$id_E:(E,d)\to(E,d')$$

مستشاكل.

5.5.1 مثال

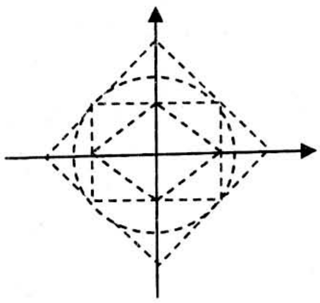
إذا أخذنا $E=\mathbb{R}^n$ وزوّدناه بالمسافتين الأساسيّتين d_1 و d_∞ الواردتين في (5.1.1) حصلنا على أنّ d_1 أدقّ من d_∞، إذ من السهل التأكّد من أن $d_\infty\le d_1$ ممّا يؤدّي إلى أنّه من أجل كلّ عنصر a من $\mathbb{R}^n$ تكون:

$$B_{d_1}(a)\subset B_{d_\infty}(a).$$

في الواقع، لدينا نتيجة أهمّ، وهي أنّ المسافتين المذكورتين متكافئتان. يعني ذلك أنّ d_∞ أدقّ بدورها من d_1. وبالفعل، نحصل، بدون عناء، على أنّ $d_1\le nd_\infty$، وهو ما تمكن ترجمته، إذا ما رمزنا بـ ρ لنصف قطر الكرة $B_{d_1}(a)$، بـ:

$$B_{d_\infty}(a,\rho/n)\subset B_{d_1}(a,\rho).$$

يمكن بالطبع، الحصول على نتيجة مماثلة لو أدرجنا المسافة الأساسيّة الثالثة الأخرى d_2. وبعبارة أوضح، نقول إنّ المسافات الأساسيّة على $\mathbb{R}^n$ متكافئة مثنى مثنى. سنعود إلى ذلك بعد حين.



يمكننا في حالة $n = 2$، أن نظهر تكافؤ المسافات الثلاث d_1 و d_2 و d_∞ باللجوء إلى التمثيل الهندسيّ المقابل. نأخذ $a = 0$ على سبيل المثال، فنحصل على:

$$B_{d_1}(0) \subset B_{d_2}(0) \subset B_{d_\infty}(0) \subset B_{d_1}(0).$$

إذا تمعّنا في المثال الّذي سقناه، وجدنا أنّ المسافتين d_1 و d_∞ تحقّقان العلاقة الحسابيّة الهامّة:

$$d_\infty \le d_1 \le n d_\infty;$$

وهي علاقة ضمنت، كما رأينا ذلك، تكافؤ المسافتين طبولوجيّا.

وبصفة عامّة، يكون من السهل الوقوف على أنّ كلّ مسافتين d و d' تكونان متكافئتين طبولوجيّا كلّما حقّقنا علاقة من النوع:

$$\alpha d' \le d \le \beta d',$$

حيث α و β عددان حقيقيّان موجبان معطيان. لنصغ ذلك في هذا الإطار:

6.5.1 قضية

لتكن d و d' مسافتين معرّفتين على مجموعة E. إذا وجد عددان حقيقيّان موجبان α و β بحيث:

$$\alpha d' \le d \le \beta d',$$

فإنّ المسافتين d و d' تكونان عندئذ متكافئتين. نقول، والحال هذه، إن المسافتين **متكافئتان متريّا**.

إثبات

وبالفعل، إذا كان a عنصرا من E و $\rho > 0$ حصلنا بكلّ وضوح على:

$$B_{d'}\left(a,\frac{\rho}{\beta}\right) \subset B_d(a,\rho) \subset B_{d'}\left(a,\frac{\rho}{\alpha}\right).$$

وهو ما يضمن التكافؤ المعلن.

إذا عدنا إلى المسافات الأساسيّة في $\mathbb{R}^n$ وجدناها تحقّق، إذا ما أخذت مثنى مثنى العلاقات التالية:

$$1.d_\infty \leq d_1 \leq nd_\infty;$$

$$1.d_\infty \leq d_2 \leq \sqrt{n}.d_\infty;$$

$$1.d_2 \leq d_1 \leq nd_2.$$

هذا كفيل بجعلها متكافئة متريّا.

7.5.1 نتيجة

تكون مسافتان d و d' متكافئتين متريّا على مجموعة إذا وفقط إذا:

$$\exists\, C > 0 \quad \forall x, y \in E \quad C^{-1}d(x,y) \leq d'(x,y) \leq Cd(x,y).$$

إثبات

يكفي أخذ $C = \max\left\{\alpha^{-1}, \beta\right\}$ في القضية أعلاه.

8.5.1 ملحوظة

ينبغي التنبيه إلى أنّ القضية أعلاه تقدّم شرطا "قويّا" للتكافؤ، أو بعبارة أدقّ، فإنّ الشرط المذكور شرط كفاية، إذ قد يحدث أن تكون مسافتان متكافئتين طبولوجيّا دون أن تكونا كذلك متريّا.

6.1 جداء فضاءات متريّة

لنعتبر عددا منتهيّا من فضاءات متريّة $(E_i, d_i)_{1\le i\le p}$. من الممكن أن نعرّف على الجذاء الديكارتيّ $\prod_{i=1}^{p} E_i = E$ عددا غير منته من المسافات كما أشير إلى ذلك في مستهلّ هذا الفصل. إنّنا لن نعتني هنا سوى بالمسافات الأساسيّة التالية. من أجل كلّ x و y من E، نضع:

$$D(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{p} d_i^{\,2}(x_i, y_i) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$D'(x,y) = \sup_{1\le i\le p} d_i(x_i, y_i),$$

$$D''(x,y) = \sum_{i=1}^{p} d_i(x_i, y_i).$$

إنّ هذه المسافات الثلاث متكافئة بمقتضى العلاقة الموالية التي تحقّقها:

$$D' \le D \le D'' \le \sqrt{p}D \le pD'.$$

ومن البائن أنّ الطبولوجيا التي تولّدها تتطابق مع طبولوجيا الجداء على E. وبالفعل، إذا كان $(a_1, a_2, ..., a_p)$ عنصرا من E و r عددا موجبا فأنّه يكون لدينا عندئذ:

$$\prod_{i=1}^{p} B_{d_i}(a_i, r) = B_{D'}\left((a_i, ..., a_p), r\right);$$

وهي علاقة تضمن التطابق المذكور.

يمكن في الواقع، توسيع هذه النتيجة إلى جماعة قابلة للعدّ من فضاءات متريّة. في هذا المضمار لدينا:

1.6.1 مبرهنة

كلّ جداء قابل للعدّ من فضاءا ت متريّة فضاء متريّ.

إذا كانت d_i مسافة معرّفة على مجموعة E_i، حيث i من $\mathbb{N}$، وتحقّق الشرط $d_i \leq 1$ فإنّ طبولوجيا الجداء على $E = \prod_{i\in\mathbb{N}} E_i$ يمكن أن تعرّف بواسطة المسافة:

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i), \quad (x,y) \in E^2.$$

إثبات

لنشر في البداية إلى أنّ فرض القيد $d_i \leq 1$ ما هو إلاّ ظاهريّ، ذلك أنّنا نعلم (راجع التمرين (2)) أنّه إذا كانت d مسافة على مجموعة ما فإنّ $\delta = \inf(1,d)$ تعرّف مسافة تكافئ d. تسمح هذه الفرضيّة من جهة أخرى، بالجزم بأنّ السلسلة الواردة في تعريف d أعلاه متقاربة ناظميّا مهما يكن x و y من E. وبالطبع، فإنّ هذه الملاحظة من شأنّها أن تساعد على تبيين أنّ d مسافة (تأكّد من ذلك). لنثبت أنّ الطبولوجيا الملحقة بها ما هي إلاّ طبولوجيا الجداء. لتكن، من أجل هذا الغرض،

$$B(a,r) = \{x \in E / d(a,x) < r\},$$

الكرة المفتوحة بالنسبة إلى d، مركزها a ونصف قطرها $0 < r$. نعلم أنّ مجموعة هذه الكرات تؤلّف أساسا للطبولوجيا الملحقة بالمسافة d. لنسمّ $\Omega(a,n,\rho)$ المفتوح الأوّلي المعرّف بـــ:

$$\Omega(a,n,\rho) = \{x \in E / d_i(a_i, x_i) < \rho,\ i \in \mathbb{N}\}.$$

إنّ هذه الأجزاء تشكّل أساسا لطبولوجيا الجداء، إذ أنّ كلّ مفتوح أوّليّ

يحتوي عنصرا $\Omega(a,n,\rho)$ من أجل a و n و r ملائمة.

يردّ الأمر الآن إلى إثبات أنّ أيّ عنصر $\Omega(a,n,\rho)$ معطى يحتوي كرة $B(a,r)$ (من أجل نصف قطر r مختار) وأنّه بالعكس، كلّ كرة $B(a,r)$ تحتوي عنصرا $\Omega(a,n,\rho)$ (من أجل n و r مختارين). لنعط عنصرا $\Omega(a,n,\rho)$ ولنختر $r=\frac{\rho}{2^n}$. فمن أجل كلّ x من $B(a,r)$ لدينا حسب تعريف d:

$$d_i(a_i,x_i)\leq 2^i\ \frac{\rho}{2^n};$$

وهو ما يؤدّى إلى أنّ:

$$d_i(a_i,x_i)\leq \rho,\ \forall i=1,2,...,n.$$

إذن:

$$B(a,r)\subseteq \Omega(a,n,\rho).$$

لنعط، عكس ذلك، كرة $B(a,r)$ ولنختر $\rho=\frac{r}{2}$ و n كبيرا بقدر كاف لضمان المتباينة:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{r}{2}.$$

لدينا:

$$\forall x\in\Omega(a,n,\rho),\ d_i(a_i,x_i)<\frac{r}{2};\ i=1,2,...,n.$$

ومنه:

$$d(a,x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i}d_i(x_i,y_i)+\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}d_i(x_i,y_i)<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r.$$

وهو ما يعني فعلا أنّ:

$$\Omega(a,n,\rho) \subseteq B(a,r);$$

ويضع حدّا للبرهان.

7.1 التقايس

إذا كان (E,d) فضاء متريّا و f تطبيقا تقابليّا من E على مجموعة غير خاليّة F، فأنّه يمكننا أن نعرّف مسافة δ على F وذلك بوضع:

$$\delta(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

نقول، في هذه الحالة، بأنّ المسافة δ نقلت إلى F بواسطة f انطلاقا من المسافة d. ولمزيد من الإيضاح نصوغ هذا الـــ:

1.7.1 تعريف

ليكن (E,d) و (F,δ) فضاءين متريّين. نسمّي تقايسا من E على F كلّ تقابل f من E على F يحقّق العلاقة:

$$\delta(f(x), f(y)) = d(x, y), \ \forall x, y \in E.$$

ونقول عن E و F أنّهما متقايسان إذا كانا مرتبطين بتقايس.

إنّ أهّم ما تجدر الإشارة إليه بهذا الصدد هو أنّ كون فضاءين متريّين متقايسين يعني أنّ عناصر هذين الفضاءين تتمتّع بنفس المزايا المتريّة والطبولوجيّة بصفة عامّة، وهذا بغضّ النظر عن أشكال هذه العناصر التي يمكن أن تختلف؛ غير أنّ هذا الاختلاف (في الشكل) ليس بذي أهميّة طبولوجيّا كما نعلم. يعزى ما سبق، في الواقع، إلى أنّ كلّ تقايس مستشاكل، وهو أمر سنبيّنه في الفصل القادم.

2.7.1 مثالان

1) إنّ التطبيق $f:(\mathbb{R},|.|)\to(\mathbb{R},|.|)$ المعطى بـــ:

$$f(x)=x\pm b,\ b\in\mathbb{R},$$

يؤلّف تقايسا على $\mathbb{R}$.

2) إذا كانت $(E_i,d_i)_{1\le i\le n}$ جماعة من فضاءات متريّة و a_i عنصرا من E_i، فإنّ التطبيق:

$$f:E_i\to E_1\times E_2\ldots\times E_{i-1}\times\{a_i\}\times E_{i+1}\times\ldots\times E_n.$$

يشكّل تقايسا من الفضاء E_i على فضاء الجداء $E=\prod_{i=1}^{n}E_i$ المزوّد بالمسافة D' المعرّفة في الفقرة السابقة. لاحظ أنّ هذا التطبيق سبق تناوله من قبل كتطبيق مستشاكل.

8.1 المسافة الفوقيّة

لتكن E مجموعة غير خالية و d تطبيقا معرّفا من E^2 نحو $\mathbb{R}_+$ ومحقّقا:

$$d(x,y)=0\iff x=y,\quad (1$$
$$d(x,y)=d(y,x),\ \forall x,y\in E,\quad (2$$
$$d(x,y)\le\max\{d(x,z),d(z,y)\},\ \forall x,y,z\in E.\quad (3$$

1.8.1 تعريف

نسمّي فضاء **متريّا فوقيّا** كلّ زوج (E,d) مؤلّف من مجموعة غير خالية E وتطبيق d يحقّق الشروط الثلاثة أعلاه. ويحمل d إسم:

المسافة الفوقيّة.

نستقي من هذا التعريف أنّ كلّ مسافة فوقيّة مسافة، غير أنّ العكس ليس صحيحا عموما. إنّ ذلك متجلّ بوضوح لو اعتبرنا على سبيل المثال المسافة الاعتياديّة (القيمة المطلقة) في $\mathbb{R}$.

نجمل في المبرهنة الموالية أهمّ الخصائص المتعلّقة بالمسافة الفوقيّة.

2.8.1 مبرهنة

إذا كان (E,d) فضاء متريّا فوقيّا فإنّ:

1) $d(y,z) \neq d(z,x) \Rightarrow d(x,y) = \max\big(d(x,z), d(z,y)\big)$,

2) كلّ كرة مفتوحة (مغلقة على التوالي) مجموعة مفتوحة ومغلقة،

3) كلّ نقطة من كرة مركز لهذه الكرة.

4) إذا اشتركت كرتان في نقطة فإنّ إحداهما تحوي الأخرى.

5) المسافة التي تفصل كرتين مفتوحتين وغير متقاطعتين وذواتي نصف قطر r ومحتواتين في كرة مغلقة ذات نصف قطر r تساوي r.

إثبات

إنّ هذه البنود الأربعة لا تخلو من إثارة مقارنة بما ألفناه من قبل في الفضاءات المتريّة "العاديّة". ألا نقرأ من خلال (1) أنّ كلّ مثلّث في (E,d) متساوي الساقين؛ ومن خلال (2) أنّ كلّ نقطة من كرة مركز لهذه الكرة! إنّ الأمر في الواقع، لا يعدو أن يكون نتيجة مباشرة للتعديل الذي مسّ المتباينة المثلّثيّة. لنتوقّف بإيجاز عند هذه الدعاوى.

1) لنفترض على سبيل المثال، أنّ $d(y,z) > d(z,x)$. يأتي عندئذ:

$$d(x,y) \le \max\big(d(x,z), d(z,y)\big) = d(y,z),$$
$$d(z,y) \le \max\big(d(z,x), d(x,y)\big) = d(x,y).$$

إذن:

$$d(x,y) = d(y,z) = \max\big(d(x,z), d(z,y)\big).$$

2) نعلم أنّ كلّ كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة. لنبيّن أنّها مغلقة. لتكن $B(a,r)$ كرة مفتوحة مركزها a ونصف قطرها $0 < r$. لدينا عند ذلك:

$$E \setminus B(a,r) = \{x \in E / d(a,x) \ge r\}.$$

لنبيّن أنّه مهما يكن b من $E \setminus B(a,r)$ فإنّ:

$$B(b,\rho) \subset E \setminus B(a,r),\ \forall \rho \le r.$$

وبالفعل، إذا كان c عنصرا من الكرة $B(b,\rho)$ كتبنا حينئذ:

$$r \le d(a,b) \le \max\big(d(a,c), d(c,b)\big) = d(a,c).$$

ومنه:

$$c \in E \setminus B(a,r).$$

نستخلص أنّ $E \setminus B(a,r)$ جزء مفتوح، وهو ما يترتّب عنه أنّ $B(a,r)$ جزء مغلق. (نترك للقارئ مهمّة القيام بالمثل إزاء الكرة المغلقة).

3) لنعتبر عنصرا b من الكرة $B(a,r)$ ولنثبت أنّ:

$$B(a,r) = B(b,r).$$

إذا كان c عنصرا من $B(a,r)$ فإنّ:

$$d(b,c) \le \max\big(d(b,a), d(a,c)\big) < r.$$

إذن، c من $B(b,r)$ وبالتالي:

$$B(a,r) \subseteq B(b,r).$$

وبالعكس، إذا كان c منتميًا إلى الكرة $B(b,r)$ فإنّ:

$$d(a,c) \leq \max\left(d(a,b), d(b,c)\right) < r.$$

أي أنّ c من $B(a,r)$. في الخلاصة، نجد $B(a,r) = B(b,r)$.

4) لنفترض أنّ ρ و r عددان حقيقيّان يذعنان للقيد $0 < r < \rho$ وأنّ c عنصر من $B(a,\rho) \cap B(b,r)$. يمكننا أن نكتب بذلك:

$$d(a,b) \leq \max\left(d(a,c), d(c,b)\right) < \rho.$$

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$\forall\, x \in B(b,r) \quad d(a,x) \leq \max\left(d(a,b), d(b,x)\right) < \rho.$$

ومنه، x عنصر من $B(a,\rho)$. إذن:

$$B(b,r) \subseteq B(a,\rho).$$

(النتيجة الواردة هنا تظلّ صحيحة لو كانت الكرتان مغلقتين).

5) لتكن $B(a,r)$ و $B(b,r)$ كرتين مفتوحتين وغير متقاطعتين و $B_f(c,r)$ كرة مغلقة تحوى الكرتين المذكورتين. من أجل كلّ x من $B(a,r)$ و y من $B(b,r)$. لدينا:

$$d(x,y) \leq \max\left(d(x,c), d(c,y)\right) \leq r.$$

ومنه:

$$d\left(B(a,r), B(b,r)\right) \leq r. \qquad (*)$$

ومن جهة أخرى، لدينا فرضا $d(x,a) \neq d(y,a)$ (و $d(b,x) \neq d(b,y)$).

يأتي استنادا إلى (1) أنّ:

$$d(x,y) = \max\left(d(x,a), d(y,a)\right) \geq r.$$

(وكذلك $(d(x,y)=\max(d(b,x),d(b,y))\geq r$. نستخلص من هذا أنّ:

$$d(B(a,r),B(b,r))\geq r. \qquad (**)$$

وإذا أقرنّا النتيجتين (*) و(**) حصلنا على المساواة المبحوث عنها.

9.1 مسائل محلولة

1) لتكن f دالّة حقيقيّة متزايدا معرّفة على $[0,+\infty[$ ومحقّقة:

أ. $f(0)=0$

ب. $\forall x,y\in\mathbb{R}_+ \quad f(x+y)\leq f(x)+f(y)$.

1) اثبت أنّه إذا كانت d مسافة على مجموعة E فإنّ التطبيق $\delta=f\circ d$ يعرّف مسافة أخرى على E .

2) استخلص أنّه إذا كانت d مسافة على E فإنّ التطبيقات الموالية تكون كذلك:

$$d_1=\frac{d}{1+d};\ d_2=Log(1+d);\ d_3=Log\left(\frac{1+2d}{1+d}\right);$$

$$d_4=d^{\alpha}\ (0<\alpha\leq 1);\ d_5=\inf(1,d).$$

2) لتكن E مجموعة غير خاليّة وليكن $d:E\times E\to\mathbb{R}_+$ تطبيقا محقّقا:

أ. $d(x,y)=0 \ \Leftrightarrow\ x=y$

ب. $d(x,z)\leq d(y,x)+d(y,z) \quad \forall x,y,z\in E$.

اثبت أنّ d مسافة على E .

3) لتكن مجموعة غير خالية و f تطبيقا حقيقيّا معرّفا على E. نضع:

$$d(x,y)=|f(x)-f(y)|.$$

1) جد شرطا لازما وكافيا يجعل d مسافة على E.

2) نضع $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ ونعرّف تطبيقا $\varphi:\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ بـ:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & ;\ x=+\infty,\\ \dfrac{x}{1+|x|} & ;\ x\in\mathbb{R},\\ -1 & ;\ x=-\infty.\end{cases}$$

تأكّد من أنّ التطبيق $d:\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}_+$ المعطى بـ:

$$d(x,y)=|\varphi(x)-\varphi(y)|$$

يعرّف مسافة على $\overline{\mathbb{R}}$.

3) ليكن F جزءا غير خال من فضاء متريّ (E,d) و $\psi:E\to F$ تطبيقا تقابليّا. اثبت أنّ التطبيق $\delta:F\times F\to\mathbb{R}_+$ المعرّف بـ:

$$\delta(x,y)=d\left(\psi^{-1}(x),\psi^{-1}(y)\right),$$

مسافة على F.

4) 1) اثبت أنّه إذا كانت d و d' مسافتين على مجموعة E فأنّه من أجل كلّ عددين موجبين α و β يكون $d''=\alpha d+\beta d'$ مسافة على E.

2) اثبت أنّه إذا كانت $(d_i)_{i\in I}$ عائلة من مسافات محدودة (أي $\sup\limits_{(x,y)\in E\times E} d_i(x,y)<+\infty$) فإنّ التطبيق $d:E\times E\to\mathbb{R}_+$ المعطى بـ $d(x,y)=\sup\limits_{i\in I} d_i(x,y)$ يعرّف مسافة على E.

3) اثبت أنّه إذا كانت $(d_i)_{i\in I}$ متتالية محدودة ومتزايدة من مسافات

على E كانت نهايتها $d=\lim_{n\to\infty} d_n$ مسافة E.

4) اثبت أنّه إذا كانت d و d' مسافتين على E فإنّ $d''=\inf(d,d')$ ليس في العموم مسافة.

5) ليكن p و q عددين حقيقيّين بحيث $1<p$ و $1<q$ و $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.

1) برهن أنّه مهما يكن العددان الحقيقيّان (أو العقديّان) a و b لدينا:

$$|ab|\le\frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}.$$

2) برهن أنّه مهما يكن العنصران $(x_1,x_2,...,x_n)$ و $(y_1,y_2,...,y_n)$ من $\mathbb{R}^n$ لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\le\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3) اثبت أنّه إذا كان $1\le p$ فإنّ:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\le\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

6) ليكن $E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. وليكن p و q عددين حقيقيّين بحيث $1<p$ و $1<q$ و $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.

1) برهن أنّ:

$$\forall u,v\in E\quad \int_a^b|u(t)||v(t)|\,dt\le\left(\int_a^b|u(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|v(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2) استنتج أنّ:

$$\int_a^b \left(|u(t)|+|v(t)|\right)^p dt = \left(\int_a^b |u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |v(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

7) ليكن $E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. نعرّف على الجداء $E\times E$ التطبيق:

$$d_p(f,g)=\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\ p\geq 1.$$

برهن أنّ (E,d_p) فضاء متريّ.

8) ليكن $\mathbb{S}=\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ فضاء المتتاليات الحقيقيّة (أو العقديّة) الشعاعيّ.

إذا كان $x=(x_n)_n$ و $y=(y_n)_n$ من وضعنا:

$$d(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}.$$

برهن أنّ d معرّف جيّدا وأنّه مسافة على $\mathbb{S}$.

9) ليكن (E,d) فضاء متريّا و A جزءا غير خال منه: ولنضع من أجل عدد $0<r$:

$$V_r(A)=\{x\in E\,/\,d(x,A)<r\}.$$

1) اثبت أنّ $V_r(A)$ جوار مفتوح لـ A.

2) أ. اثبت أنّ $\bigcup_{x\in A} B(x,r)=V_r(A)$

ب. ماذا تستنتج؟

3) أ. اثبت أنّ:

$$\overline{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\in E\,/\,d(x,A)<\frac{1}{n}\right\}.$$

ب. استنتج أنّ كلّ مغلق من فضاء متريّ تقاطع قابل للعدّ من مفتوحات.

4) أ. اثبت أنّ:

$$\forall B \in \mathscr{P}(E)\setminus\{\phi, E\} \quad \overset{\circ}{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \in E / d(x, C_E B) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

ب. استنتج أنّ كلّ مفتوح من فضاء متريّ اتّحاد قابل للعدّ من مغلقات من E.

5) قارن الجزأين $V_r\left(V_s(A)\right)$ و $V_{r+s}(A)$، حيث s و r من $\mathbb{R}_+^*$.

10) ليكن (E,d) فضاء متريّا. نرمز بـ $B(a,\rho)$ و $B_f(a,\rho)$ للكرتين المفتوحة والمغلقة على الترتيب، مركزاهما a من E ونصف قطريهما $\rho > 0$.

1) اثبت أنّ $B_f(a,\rho)$ جزء مغلق.

2) اثبت أنّ $\overline{B(a,\rho)} \subset B_f(a,\rho)$.

3) هات مثالا يكون فيه الاحتواء الوارد في (2) فعليّا.

(وبعبارة أدقّ، ملاصقة كرة مفتوحة $B(a,\rho)$ ليست بالضرورة الكرة المغلقة $B_f(a,\rho)$).

11) نزوّد المجموعة $E = \mathscr{C}\left([0,1], \mathbb{R}\right)$ بالمسافتين الأساسيّتين:

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx; \; d_\infty(f,g) = \sup_{0\leq x\leq 1}|f(x) - g(x)|,$$

ونعتبر الدالّة h المعرّف من $[0,1]$ نحو $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = 2$.

1) مثّل هندسيّا الكرة $B_{d_\infty}(h,1)$ بالنسبة إلى d_∞.

2) من أجل $0<r$ نضع:

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{4x}{r}+4 \ ; \ 0\le x\le \dfrac{1}{2}r,\\ 2 \qquad\qquad ; \ \dfrac{1}{2}r\le x\le 1.\end{cases}$$

بيّن أنّ التطبيق g ينتمي إلى الكرة $B_{d_1}(h,1)$ ولا ينتمي إلى $B_{d_\infty}(h,1)$.

3) استنتج أنّ المسافتين d_∞ و d_1 غير متكافئتين طبولوجيًا.

12) نعتبر الفضاء $\mathbb{R}^2$ مزوّدا بالمسافة الإقليديّة d_2. ونعتبر التطبيق δ المعرّف على النحو الموالي:

$$(X,Y)=\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)\mapsto \delta(X,Y)=$$

$$=\begin{cases}d_2(X,Y) & ; \ x_1=y_1\\ d_2(O,X)+d_2(O,y) & ; \ x_1\neq y_1\end{cases}$$

1) اثبت δ أنّ مسافة على $\mathbb{R}^2$.

2) ارسم بدقّة الكرة المفتوحة $B(A,r)$ في $(\mathbb{R}^2,\delta)$ في الحالات التالية:

أ. $A=O$

ب. $A\neq O$ و $0<r\le d_2(O,A)$

ج. $r>d_2(O,A)$

3) ليكن H جزءا من $\mathbb{R}^2$. نرمز بـ $\overset{\circ}{B}_d$ لداخلية H في $(\mathbb{R}^2,d_2)$ وبـ $\overset{\circ}{H}_\delta$ بـ لداخلية H في $(\mathbb{R}^2,\delta)$. برهن أنّ:

$$\overset{\circ}{H}_d\subseteq \overset{\circ}{H}_\delta .$$

4) قارن الطبولوجيتين الملحقتين بـ d_2 و δ في $\mathbb{R}^2$.

5) برهن أنّ:

$$\overline{H}_\delta \subseteq \overline{H}_d.$$

6) عيّن $\overline{H}_d$ و $\overline{H}_\delta$ في الحالتين:

أ. $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y>0\}$,

ب. $G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2-2y<-\dfrac{3}{4}\right\}$.

10.1 حلول

1) 1) لتكن x و y و z ثلاثة عناصر كيفيّة من E. إذا كان $x=y$ فإنّ:

$$\delta(x,y)=f(d(x,y)=f(0)=0.$$

إذا كان $x\neq y$ فإنّ $d(x,y)>0$ وبالتالي:

$$\delta(x,y)=f(d(x,y)>f(0)=0,$$

ذلك لأنّ f متزايدة. نرى هكذا أنّ الشرط الأوّل ش$_1$ متوفّر.

شرط التناظر ش$_2$ $\delta(x,y)=\delta(y,x)$ حاضر بداهة.

أخيرا، يمدّنا تزايد f المدعّم بالمتباينة المثلّثيّة على d بـــ:

$$\delta(x,z)=f(d(x,z)\leq f(d(x,z)+d(z,y)).$$

ولمّا كانت مستوفية الشرط (ب) حصلنا على:

$$f(d(x,z)\leq f(d(x,z))+f(d(z,y));$$

وهو ما ينهي متباينة المثلّث إزاء δ.

2) يكفي على ضوء ما سبق، أن نتأكّد من أنّ التطبيقات:

$$f(x)=\frac{x}{1+x},\ \ g(x)=Log(1+x),\ \ h(x)=Log\left(1+\frac{x}{1+x}\right),$$

$$k(x)=x^\alpha,\ \ell(x)=\inf(1,x),$$

على التوالي تتمتّع بالخصائص الثلاث الموضوعة في مستهلّ التمرين.

بخصوص الأوّل، نرى أنّ f ينعدم عند الصفر ويقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ ويطابق مشتقّه العبارة $\frac{1}{(1+x)^2}$، ممّا يجعله متزايدا تماما. في الأخير لدينا:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \frac{x+y}{1+x+y} = \frac{x}{1+x+y} + \frac{y}{1+x+y} \\ &\le \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

بخصوص الثاني، نرى أنّ g قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ ومشتقّه $\frac{1}{1+x}$ موجب تماما. إذن، g متزايد تماما. إلى جانب هذا، لدينا:

$$\begin{aligned} g(x+y) - g(x) - g(y) &= Log(1+x+y) - Log(1+x) - Log(1+y) \\ &= Log\left(\frac{1+x+y}{(1+x)(1+y)}\right) = Log\left(\frac{1+x+y}{1+x+y+xy}\right) \\ &\le Log\left(\frac{1+x+y}{1+x+y}\right) = 0. \end{aligned}$$

بشأن الثالث يكفي أن نلاحظ أنّ $h = g \circ f$.

يمكن بطبيعة الحال أن نسوق هذا التبرير المباشر.

أ. h متزايد على $\mathbb{R}_+$:

$$h'(x) = \frac{1}{(1+x)(1+2x)} > 0.$$

$$\frac{1+2x+2y}{1+x+y}=1+\frac{x+y}{1+x+y}\le 1+\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}$$

ب. $$\le\left(1+\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}\right)+\frac{xy}{(1+x)(1+y)}$$

$$\le\left(1+\frac{y}{1+y}\right)\left(1+\frac{x}{1+x}\right).$$

ومنه:

$$h(x+y)\le h(x)+h(y).$$

بخصوص الرابع، نلاحظ أنّ k قابل للاشتقاق وأنّ مشتقّه $\alpha x^{\alpha-1}$ موجب تماما. إذن، k متزايد تماما. وعلاوة على ذلك، لدينا:

$$k(x+y)=(x+y)^{\alpha}=\left(\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^{p}+\left(y^{\frac{1}{p}}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

حيث $p=\frac{1}{\alpha}>1$. تسمح متباينة مينكوفسكي[8] (اللاحقة بعد حين!) بالجزم بأنّ:

$$\left(\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^{p}+\left(y^{\frac{1}{p}}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(x^{\frac{1}{p}}\right)+\left(y^{\frac{1}{p}}\right)=x^{\alpha}+y^{\alpha};$$

وبالتالي:

$$k(x+y)\le k(x)+k(y).$$

8. Hermann Minkowski : رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 22 جوان 1864 بألكسوتا (ليتوانيا الحالية) ومات في 12 جانفي 1909 بــﭬوتنڤان. تدور أعماله حول الفضاءات النظيميّة الحقيقيّة وكذا الأشكال التربيعيّة. كان في زوريخ أحد أساتذة ألبير أنشتاين.

بخصوص الخامس والأخير، نلاحظ أنّ $\ell(0) = \inf(1,0) = 0$. بقي أن نتأكّد من أنّ:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad \inf(1, x+y) \leq \inf(1,x) + \inf(1,y).$$

لنعتبر من أجل كلّ عنصر y مثبّت في $\mathbb{R}_+$ العبارة:

$$\varphi_y(x) = \inf(1,x) + \inf(1,y) - \inf(1, x+y).$$

إذا كان $0 \leq y \leq 1$ و $x \leq 1-y$ فإنّ:

$$\varphi_y(x) = x + y - (x+y) = 0,$$

بينما إذا كان $1-y \leq x \leq 1,$ فإنّ:

$$\varphi_y(x) = x + y - 1 \geq 0,$$

وإذا كان $1 \leq x$ فإنّ:

$$\varphi_y(x) = 1 + y - 1 = y \geq 0.$$

الآن، إذا كان $1 \leq y$ وكان $0 \leq x \leq 1$ فإنّ:

$$\varphi_y(x) = x + 1 - 1 = x \geq 0,$$

بينما لو كان $x \geq 1$ فإنّ:

$$\varphi_y(x) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0.$$

نرى في الخلاصة أنّ ℓ يحقّق الشرط الثالث، وهو ما ينهي التمرين.

2) يكفي على d أن يحقّق شرط التناظر ش$_2$. من أجل $z = y$ نحصل على ضوء الشرطين (أ) و(ب) على:

$$\forall x, y \in E \quad d(x,y) \leq d(y,x). \qquad (*)$$

إذا قمنا بمبادلة وضعية x و y في (ب) أصبح هذا الشرط:

$$d(y,z) \leq d(x,y) + d(x,z), \ \forall x,y,z \in E.$$

وعليه، من أجل $z = x$ يأتي:

$$\forall x, y \in E \quad d(y, x) \leq d(x, y). \qquad (**)$$

إنّ تكأكأ النتيجتين (*) و(**) ينهي السؤال.

3) 1) إنّ شرطي التناظر والمتباينة المثلثيّة ش2 وش3 محقّقان دونما أيّ شرط على f. فهما نتيجتان مباشرتان من خصائص القيمة المطلقة. بخصوص شرط المطابقة ش1 لدينا بجلاء:

$$f \text{ متباين } \Leftrightarrow \left(d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y\right)$$

2) ليس علينا، بموجب السؤال الأوّل، سوى التأكّد من أنّ φ متباين. من الواضح أنّ هذا الأخير لا يأخذ 1 و-1 سوى عند النقطتين المختلفتين $+\infty$ و$-\infty$. أمّا على $\mathbb{R}$، فإنّنا نلاحظ أنّ φ قابل للاشتقاق ويحقّق مشتقّه:

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & ; \ x \geq 0, \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & ; \ x < 0, \end{cases}$$

وهو أمر يجعله متزايدا وبالتالي متباينا.

3) الأمر كذلك بالفعل. فالتطبيق يحقّق الشرطين ش2 و ش3 بداهة الشرط. أمّا الشرط الأوّل ش1 فنابع عن تباين ψ^{-1}.

4) 1) يمكن استنادا إلى إذعان d وd' للشروط ش1 وش2 وش3، الحصول فورا على:

$$\begin{aligned} d''(x,y)=0 &\Leftrightarrow (\alpha d+\beta d')(x,y)=0 \\ &\Leftrightarrow \alpha d(x,y)+\beta d'(x,y)=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha d(x,y)=0 \\ \beta d'(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d''(x,y) &= (\alpha d+\beta d')(x,y)=\alpha d(x,y)+\beta d'(x,y) \\ &= \alpha d(y,x)+\beta d'(y,x)=d''(y,x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d''(x,y) &= \alpha d(x,y)+\beta d'(x,y) \le \alpha(d(x,z)+d(z,y))+ \\ &\qquad + \beta(d'(x,z)+d'(z,y)) \\ &\le \big(\alpha d(x,z)+\beta d'(x,z)\big)+\big(\alpha d(z,y)+\beta d'(z,y)\big) \\ &\le d''(x,z)+d''(z,y). \end{aligned}$$

2) نفعل مثل ما في (1). نكتفي باختبار توفّر المتباينة المثلّثيّة. لدينا:

$$\forall i\in I \quad d_i(x,y)\le d_i(x,z)+d_i(z,y).$$

ومنه:

$$\forall i\in I \quad d_i(x,y)\le \sup_{j\in I} d_j(x,z)+\sup_{j\in I} d_j(z,y).$$

وبالتالي:

$$\forall i\in I \quad d_i(x,y)\le d(x,z)+d(z,y);$$

وأخيرا:

$$\sup_{i\in I} d_i(x,y)=d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y).$$

3) إنّه حالة خاصة للحالة (2).

4) يمكن رؤية ذلك عبر هذا المثال المضاد.

لنعتبر مجموعة من ثلاثة عناصر $E=\{a,b,c\}$ ولنزوّدها بالمسافتين d و d' المعرّفتين على النحو:

$$d(b,c)=2,\ \ d(a,c)=3,\ \ d(a,b)=1,$$
$$d'(b,c)=1,\ \ d'(a,c)=3.\ \ d'(a,b)=2,$$

لدينا:

$$d''(a,b)+d''(b,c)=2<d''(a,c)=3.$$

وهو ما ينفي عن d'' المتباينة المثلّثيّة.

5) 1) لنشر بادئ ذي بدء إلى أنّ هذه المتباينة مشهورة في الأدب الرياضيّاتيّ تحت تسمية **متباينة يونغ**[9]. لإثباتها نميّز الحالات الممكنة الثلاث التالية.

أ. إذا كان $a=0$ أو $b=0$ أضحت العلاقة واضحة.

ب. إذا كان $a>0$ و $b>0$ عمدنا إلى إدراج الدالّة الحقيقيّة المعطاة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^p}{p}-x;$$

ونستعين بتغيّراته.

هذه الدالّة قابلة للاشتقاق ومحدودة وتدرك حدّها الأدنى عند النقطة التي فاصلتها $a=1$، ذلك لأنّ هذه الأخيرة تعدم المشتقّ:

$$f'(x)=x^{p-1}-1,$$

ولدينا إلى جانب ذلك:

$$f''(x)=(p-1)x^{p-2}>0.$$

---

9. William Henry,Young : رياضيّاتيّ انــڤليزيّ. ولد في 20 أكتوبر 1863 بلندن ومات في 7 جويلية 1942 بلوزان. انصبّت أعماله الهامّة حول الدوال متعدّدة المتغيّرات.

وعليه:

$$f(x) \geq f(1), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

وبالخصوص:

$$f\left(ab^{1-q}\right) \geq f(1);$$

أي:

$$\frac{\left(ab^{1-q}\right)^p}{p} - ab^{1-q} \geq \frac{1}{p} - 1 = -\frac{1}{q}.$$

وبالتالي:

$$\frac{a^p}{p} b^{(1-q)p} - ab^{1-q} + \frac{1}{q} \geq 0.$$

إذا قسمنا طرفي هذه المتباينة على $b^{(1-q)p}$ حصلنا على:

$$\frac{a^p}{p} - ab^{(1-q)-p+pq} + \frac{b^{-(1-q)p}}{q} \geq 0.$$

ولمّا كان $pq = p + q$ و $-(1-q)p = q$ جاءنا:

$$\frac{a^p}{p} - ab + \frac{b^q}{q} \geq 0.$$

ومنه:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q};$$

وهو المبتغى.

ملحوظة

يمكن بطبيعة الحال الخوض في البرهان على هذا المنوال:

$$ab = e^{Log\,a + Log\,b} = e^{\frac{1}{p}Log\,a^p + \frac{1}{q}Log\,b^q} \le \frac{1}{p}e^{Log\,a^p} + \frac{1}{q}e^{Log\,b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

يكمن قيام المتباينة التي تتوسّط هذه العلاقة في تحدّب الدالّة الأسيّة $x \mapsto e^x$.

ج. إذا كان a و b كيفيّين لاحظنا أنّ:

$$|ab| = |a||b|.$$

يسمح الفرع (ب) بالحصول على المتباينة المنشودة:

$$|ab| = |a||b| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

2) المتباينة الحاضرة تحمل اسم الرياضيّاتيّ هولدر. نميّز حالتين:

أ. $x_i \ge 0,\ y_i \ge 0;\ i = 1, 2, ..., n$

لنضع:

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}},\ B = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

إذا كان $A = 0$ أو $B = 0$ أضحت المتباينة تافهة.

لنفترض أنّ A و B ليسا معدومين ولنضع:

$$a_i = \frac{x_i}{A},\ \ b_i = \frac{y_i}{B};\ i = 1, 2, ..., n.$$

تسمح متباينة يونغ السالفة الذكر بالحصول على:

$$a_i b_i \le \frac{a_i^p}{p} + \frac{b_i^q}{q},\ i = 1, 2, ..., n.$$

ومنه:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{q}.$$

بتعويض a_i و b_i بقيمتيهما نجد:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{AB} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{A}\right)^p}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{B}\right)^q}{q}.$$

نستخلص أنّ:

$$\frac{1}{AB} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{pA^p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}{qB^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

وأخيرا:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq AB = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

ب. إذا كانت x_i و y_i أعدادا حقيقيّة (أو عقديّة) كيفيّة أمكن أن نكتب بالارتكاز على ما سبق:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

إنّها المتباينة المطلوبة !

3) نحن أمام **متباينة مينكوفسكي.**

إذا كان $p = 1$ كتبنا توّا:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|.$$

وهي نتيجة واضحة. إذا كان $1 < p$ ميّزنا حينئذ حالتين كعهدنا بما سبق.

أ. لنفترض أنّ x_i و y_i $(i = 1, 2, ..., n)$ أعداد موجبة ولنضع:

$$z_i = (x_i + y_i)^{p-1}.$$

إذا استندنا إلى متباينة هولدر السابقة حصلنا على:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

وإذا تذكّرنا أنّ $q = \dfrac{p}{p-1}$ كتبنا من جديد:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \qquad (*)$$

وبالمثل، لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i z_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \qquad (**)$$

وبجمع النتيجتين (*) و (**) طرفا طرفا ينتج:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p \le \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

وباستبدال z_i بقيمته وضرب طرفي هذه المتباينة في $\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$

نحصل على:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1-p}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

وهو ما يؤدّي إلى المرغوب:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ب. إذا كانت x_i و y_i $(i=1,2,...,n)$ أعدادا حقيقيّة أو عقديّة كيفيّة لاحظنا كالعادة أنّ:

$$|x_i+y_i|\leq|x_i|+|y_i|.$$

ومنه:

$$|x_i+y_i|^p\leq\left(|x_i|+|y_i|\right)^p.$$

وبمقتضى الحالة (أ) نحصل على:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

وهو ما ينهي البرهان.

6) لنسرع بالإشارة إلى أنّ هاتين المتباينتين تمثّلان النموذج التكامليّ لمتباينتي هولدر ومينكوفسكي على التوالي.

1) لنبدأ بالقول إنّه إذا كان $\left(\int_a^b|u(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}=0$ أو $\left(\int_a^b|v(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}=0$

فإنّ u أو v يضحى معدوما، ممّا يجعل المتباينة واضحة.

لنفترض الآن أنّ هاتين العبارتين موجبتان تماما. يمكن عندئذ أنّ نكتب بمقتضى متباينة يونغ:

$$\forall t\in[a,b]\quad \frac{|u(t)|}{\left(\int_a^b|u(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\frac{|v(t)|}{\left(\int_a^b|v(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\le\frac{1}{p}\frac{|u(t)|^p}{\int_a^b|u(t)|^p}+\frac{1}{q}\frac{|v(t)|^q}{\int_a^b|v(t)|^q}.$$

إذا قمنا بمكاملة طرفي هذه المتباينة بين a و b تحصّلنا مباشرة على متباينتنا.

2) بخصوص متباينة مينكوفسكي نكتب:

$$\int_a^b(|u(t)|+|v(t)|)^p dt=\int_a^b(|u(t)|+|v(t)|)^{p-1}|u(t)|dt+$$
$$+\int_a^b(|u(t)|+|v(t)|)^{p-1}|v(t)|dt;$$

ثمّ نطبّق المتباينة السابقة على تكاملي الطرف الأيمن من هذه المساواة فنحصل على:

$$\int_a^b(|u(t)|+|v(t)|)^p dt\le\left(\int_a^b|u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b(|u(t)|+|v(t)|)^{(p-1)q}dt\right)^{\frac{1}{q}}+$$
$$+\left(\int_a^b|v(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b(|u(t)|+|v(t)|)^{(p-1)q}dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

إذا لاحظنا أنّ $(p-1)q=p$ و $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$ وقسمنا طرفي هذه المتباينة على $\left(\int_a^b(|u(t)|+|v(t)|)^{(p-1)q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$ جاءنا المطلوب.

7) علينا أن نبيّن أنّ d_p مسافة على E. إنّ فحص المتباينة المثلّثيّة ش3 يغني، لوضوح توفّر شرطي المطابقة ش2 والتناظر ش1. ليكن f و g

و h ثلاثة عناصر من E و q عددا حقيقيّا بحيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. علينا أن نبرهن أنّ:

$$\left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(t)-h(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left(\int_a^b |h(t)-g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

إذا وضعنا:

$$f(t)-h(t)=u(t),\ h(t)-g(t)=v(t)$$

أخذت المتباينة الموضوعة الشكل المبسّط:

$$\left(\int_a^b |u(t)+v(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |v(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ولمّا كان:

$$|u(t)+v(t)|^p \leq \left(|u(t)|+|v(t)|\right)^p$$

اكتفينا بإثبات أنّ:

$$\left(\int_a^b \left(|u(t)|+|v(t)|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |v(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

إنّها متباينة مينكوفسكي التي سبق لنا الالتقاء بها !

8) من أجل كلّ $x=(x_n)_n$ و $y=(y_n)_n$ من لدينا:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}<1.$$

نستنتج أنّ السلسلة المعرّفة لـ $d(x,y)$ متقاربة، ذلك لأنّ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2<+\infty.$$

وعليه، فإنّ d معرّف جيّدا.

من جهة أخرى، نلاحظ أنّ شرطي المطابقة والتناظر جليّان.

بخصوص المتباينة المثلّثيّة، نذكر بأنّه إذا كانت δ مسافة كانت $\frac{\delta}{1+\delta}$ مسافة أخرى. هكذا، من أجل $x=(x_n)_n$, و $y=(y_n)_n$ و $z=(z_n)_n$ من $\mathbb{S}$ لدينا:

$$\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}\le\frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|}+\frac{|z_n-y_n|}{1+|z_n-y_n|}.$$

وعليه، من أجل كلّ عدد طبيعيّ p يمكن الحصول على:

$$\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}\le\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|}+\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{2^n}\frac{|z_n-y_n|}{1+|z_n-y_n|}.$$

نقوم بعد ذلك بالمرور إلى النهاية مع مآل p إلى $+\infty$ (وهو أمر مشروع) فنجد:

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y).$$

9) 1) من الواضح أنّ A محتوى في $V_r(A)$. فهل $V_r(A)$ مفتوح ؟

ليكن، من أجل ذلك، x عنصرا من $V_r(A)$. يأتي عندئذ أنّ $r>d(x,A)$.

وإذا وضعنا:

$$\rho_x=r-d(x,A)>0,$$

وجدنا أنّ:

$$B(x,\rho_x) \subset V_r(A).$$

إذن $V_r(A)$ مفتوح.

2) أ. لدينا على الفور:

$$b \in \bigcup_{a\in A} B(a,r) \iff \exists\, a \in A : d(a,b) < r$$
$$\iff d(b,A) < r \iff b \in V_r(A).$$

ومنه المساواة.

ب. نستخلص أنّ $V_r(A)$ جزء مفتوح. وبما أنّه يحوي A فهو جوار مفتوح لهذا الأخير.

3) أ. لنضع من أجل كلّ عدد طبيعيّ غير معدوم n:

$$V_{\frac{1}{n}}(A) = \left\{ x \in E \,/\, d(x,A) < \frac{1}{n} \right\}.$$

يأتي بعدئذ:

$$x \in \overline{A} \iff d(x,A) = 0$$
$$\iff d(x,A) < \frac{1}{n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \iff x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_{\frac{1}{n}}(A).$$

ومنه المساواة.

ب. وبالفعل، إذا كان F جزءا مغلقا من فضاء متريّ (E,d)، فإنّ الفرع (أ) يسمح على التوّ بأنّ نستنتج المطابقة:

$$F = \overline{F} = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_{\frac{1}{n}}(F).$$

ولمّا كانت عناصر العائلة القابلة للعدّ $\left(V_{\frac{1}{n}}(F)\right)_n$ مفتوحة كان الردّ قد تمّ.

4) أ. لنشر إلى أنّ $\mathring{B}$ يرمز لداخلية B. وهي تعريفا مجموعة

النقاط التي تكون لها B جوارا. من ضمن العلاقات التي تربطها بالملاصقة نذكّر بـــ:

$$C_E \overset{\circ}{B} = \overline{C_E B}.$$

وعليه، يأتي بجلاء:

$$\overset{\circ}{B} = C_E\left(\overline{C_E B}\right) = C_E\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x \in E : d(x, C_E B) < \frac{1}{n}\right\}\right)$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} C_E\left\{x \in E : d(x, C_E B < \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \in E : d(x, C_E B \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

ب. يكون جزء B مفتوحا إذا وفقط إذا طابق داخليته $\overset{\circ}{B}$. وعليه، يأتي:

$$B = \overset{\circ}{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \in E : d(x, C_E B \geq \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_E V_{\frac{1}{n}}(B).$$

إنّ عناصر العائلة القابلة للعدّ $\left(C_E V_{\frac{1}{n}}(B)\right)_n$ مغلقة. إنّه المبتغى.

5) ليكن x عنصرا من $V_r\left(V_s(A)\right)$. نكتب عندئذ:

$$\forall \ y \in V_s(A) \quad d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) < d(x, y) + s.$$

ومنه:

$$d(x, A) < d(x, V_s(A)) + s < r + s.$$

إذن، x ينتمي إلى $V_{r+s}(A)$، وبالتالي:

$$V_r\left(V_s(A)\right) \subset V_{r+s}(A).$$

لنبيّن أنّه يمكن لهذا الاحتواء أن يكون فعليّا. نعتبر بغية ذلك فضاء متريّا انقطاعيّا يضمّ أكثر من عنصر. نحصل عند ذلك على:

$$V_{\frac{1}{2}}\left(V_{\frac{1}{2}}(\{a\})\right)=\{a\},$$

في حين أنّ:

$$V_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(\{a\})=E.$$

10) 1) نقوم بإثبات أنّ المتمّمة $C_E\left(B_f(a,r)\right)$ جوار لكلّ نقاطها. ليكن x عنصرا منها. إنّه يحقّق $d(a,x)>r$. لنضع:

$$\rho=\frac{d(a,x)-r}{2}.$$

نجزم بأنّ الكرة $B(x,\rho)$ محتواة في $C_E\left(B_f(a,r)\right)$. وبالفعل، من أجل كلّ عنصر y مأخوذ من $B(x,\rho)$ لدينا:

$$d(a,x)-d(a,y)\leq|d(a,x)-d(a,y)|\leq d(x,y)<\rho,$$

ومنه:

$$d(a,y)>\frac{d(a,x)+r}{2}>r.$$

إذن y عنصر من $C_E\left(B_f(a,r)\right)$، وبه ينتهي السؤال.

2) لدينا بطبيعة الحال:

$$B(a,r)\subseteq B_f(a,r).$$

إذن:

$$\overline{B(a,r)}\subseteq\overline{B_f(a,r)}=B_f(a,r).$$

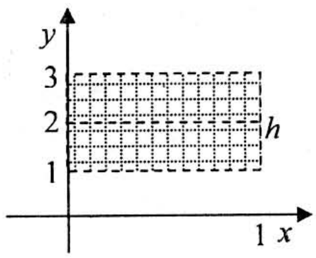
3) نجد ذلك مثلا في حالة فضاء متريّ انقطاعيّ (E,d). لدينا هنا:

$$\forall a\in E\quad \overline{B(a,1)}=\overline{\{a\}}=\{a\}\subset B_f(a,1)=E.$$

11) 1) لدينا:

$$B_{d_\infty}(h,1)=\{f\in E\,/\,d_\infty(h,f)<1\}=\left\{f\in E\,/\sup_{0\le x\le 1}|2-f(x)|<1\right\}.$$

وبتمثيل دالّة من E بمنحناها نجد أنّ الكرة المطلوبة ممثّلة بالجزء المشطوب من الرسم المقابل.



2) انتماء g إلى $B_{d_1}(h,r)$ نتيجة واضحة لهذا الحساب:

$$d_1(h,g)=\int_0^1|2-g(x)|\,dx=\int_0^{\frac{r}{2}}\left|2+\frac{4x}{r}-4\right|dx$$

$$=\int_0^{\frac{r}{2}}\left|\frac{4x}{r}-2\right|dx=\int_0^{\frac{r}{2}}\left(2-\frac{4x}{r}\right)dx=\frac{r}{2}<r.$$

وبالمثل، لدينا:

$$d_\infty(h,g)=\sup_{0\le x\le\frac{r}{2}}\left|2+\frac{4x}{r}-4\right|=\sup_{0\le x\le\frac{r}{2}}\left|\frac{4x}{r}-2\right|=2.$$

إذن، g لا ينتمي إلى الكرة $B_{d_\infty}(h,1)$.

3) يتبيّن ممّا سبق أنّ الكرة $B_{d_\infty}(h,1)$ لا تضمّ أيّة كرة مفتوحة $B_{d_1}(h,r)$، وهو ما يكفي للجزم بأنّ d_∞ و d_1 ليستا متكافئتين.

12) 1) لنتأكّد من توفر شروط المسافة في التطبيق δ.

أ. لدينا:

$$\delta(X,Y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} d_2(X,Y)=0 & ;\ x_1=y_1, \\ d_2(O,X)+d_2(O,Y)=0 & ;\ x_1\neq y_1. \end{cases}$$

ولكن العلاقة:

$$\left(d_2(O,X)+d_2(O,Y)=0\ ;x_1\neq y_1\right)$$

غير ممكنة إذ أنّها تفضي إلى أنّ $X=Y$ و $x_1\neq y_1$، وهو أمر مستحيل، وعليه، يأتي:

$$\delta(X,Y)=0 \Leftrightarrow d_2(X,Y)=0 \Leftrightarrow X=Y.$$

ب. $\delta(X,Y)=\delta(Y,X)$ واضح !

ج. ليكن $X(x_1,x_2)$ و $Y(y_1,y_2)$ و $Z(z_1,z_2)$ ثلاثة عناصر من $\mathbb{R}^2$. نميّز عدّة حالات.

- من أجل $x_1\neq y_1$ و $x_1\neq z_1$ لدينا:

$$\begin{aligned}\delta(X,Y)&=d_2(O,X)+d_2(O,Y)\\ &\leq d_2(O,X)+d_2(O,Z)+d_2(O,Z)+d_2(O,Y)\\ &\leq \delta(X,Z)+\delta(Z,Y).\end{aligned}$$

- من أجل $x_1=y_1$ و $x_1=z_1$ لدينا:

$$\delta(X,Y)=d_2(X,Y);\ \delta(X,Z)=d_2(X,Z);\ \delta(Z,Y)=d_2(Z,Y),$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}\delta(X,Y)=d_2(X,Y)&\leq d_2(X,Z)+d_2(Z,Y)\\ &\leq \delta(X,Z)+\delta(Z,Y).\end{aligned}$$

• من أجل $x_1 \neq y_1$ و $x_1 = z_1$ لدينا:

$$\begin{aligned}\delta(X,Y) &= d_2(O,X)+d_2(O,Y)\\ &\leq d_2(O,Z)+d_2(Z,X)+d_2(O,Y)\\ &\leq \delta(X,Z)+\delta(Z,Y).\end{aligned}$$

• من أجل $x_1 = y_1$ و $x_1 \neq z_1$ لدينا:

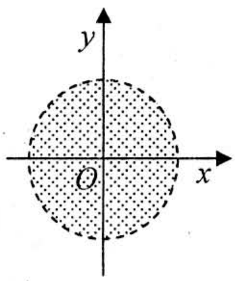
$$\begin{aligned}\delta(X,Y) &= d_2(X,Y) \leq d_2(X,Z)+d_2(Z,Y)\\ &\leq d_2(X,O)+d_2(O,Z)+d_2(Z,O)+d_2(O,Y)\\ &\leq \delta(X,Z)+\delta(Z,Y).\end{aligned}$$

نرى هكذا أنّ التطبيق δ يحقّق الشروط الثلاثة المعرّفة لمسافة.

2) وصف الكرة المفتوحة $B_\delta(A,r)$ في $(\mathbb{R}^2,\delta)$.

أ. $A=O$. لدينا:

$$\begin{aligned}B_\delta(O,r) &= \left\{X\in\mathbb{R}^2 / \delta(O,X)<r\right\}\\ &= \left\{X\in\mathbb{R}^2 / x_1=0;\ d_2(O,X)<r\right\}\cup\\ &\qquad \cup\left\{X\in\mathbb{R}^2 / x_1\neq 0;\ d_2(O,X)<r\right\} = B_d(O,r).\end{aligned}$$



نستخلص أنّ الكرات المفتوحة المتمركزة في O وذات نصف قطر r في $(\mathbb{R}^2,\delta)$ متطابقة مع الكرات المفتوحة الإقليديّة ذات نفس المركز ونفس نصف القطر. $B_d(O,r)=B_\delta(O,r)=$ الجزء المشطوب من الرسم المقابل.

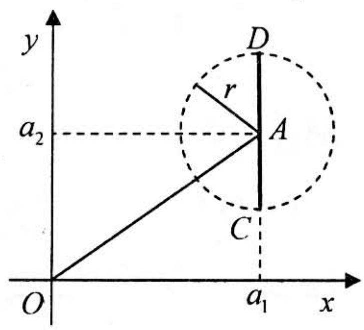
ب. $A \neq O$ و $0 < r < d_2(O,A)$:

في هذه الحالة لدينا:

$$\begin{aligned} B_\delta(A,r) &= \{X \in \mathbb{R}^2 / \delta(A,X) < r\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^2 / x_1 = a_1;\ d_2(A,X) < r\} \cup \\ &\quad \cup \{X \in \mathbb{R}^2 / x_1 \neq a_1;\ d_2(O,A) + d_2(O,X) < r\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^2 / x_1 = a_1;\ d_2(A,X) < r\} \cup \\ &\quad \cup \{X \in \mathbb{R}^2 / x_1 \neq a_1;\ d_2(O,X) < r - d_2(O,A)\}. \end{aligned}$$

وإذا ما لاحظنا أنّ العدد $r - d_2(O,A)$ سالب فرضا تبيّن أنّ الجزء الثاني من هذه المساواة الأخيرة خال؛ وعليه:

$$B_\delta(A,r) = \{X \in \mathbb{R}^2 / x_1 = a_1;\ d_2(A,X) < r\}.$$



فالكرة $B_\delta(A,r)$، هنا، تساوي تقاطع الكرة $B_d(A,r)$ مع المستقيم ذي المعادلة $x = a_1$. إنّها قطعة مستقيمة !

$$B_\delta(A,r) = CD.$$

ج. $A \neq O$ و $r > d_2(A,O)$:

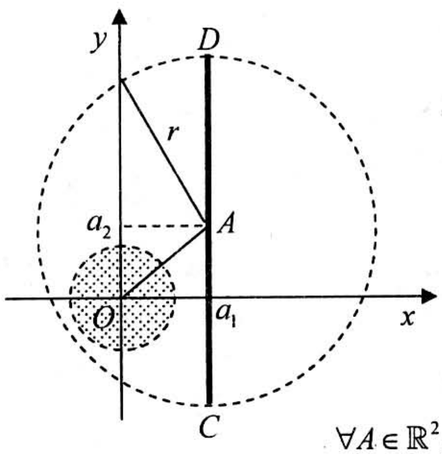
لدينا:

$$\begin{aligned} B_\delta(A,r) &= \{X \in \mathbb{R}^2 / x_1 = a_1;\ d_2(A,X) < r\} \cup \\ &\quad \cup \{X \in \mathbb{R}^2 / x_1 \neq a_1;\ d_2(O,X) < r - d_2(O,A)\}. \end{aligned}$$

وبوضع $r_1 = r - d(O,A)$، نكتب:

$$B_\delta(A,r)=\{X\in\mathbb{R}^2 / x_1=a_1;\ d_2(A,X)<r\}\cup$$
$$\cup\{X\in\mathbb{R}^2 / x_1\neq a_1;\ d_2(O,X)<r_1\}.$$

نحصل هكذا على أنّ:



، $B_\delta(A,r)=B_d(A,r_1)\cup CD$

كما هو مبيّن في هذا الرسم.

3) نستخلص من السؤال السابق أنّ:

$$\forall A\in\mathbb{R}^2,\ \forall r>0,\ \ B_\delta(A,r)\subset B_d(A,r_1).$$

وعليه:

$$X\in\overset{0}{H}_d\ \ \Leftrightarrow\ \ \exists r>0 / B_d(X,r)\subseteq H,$$

ومنه:

$$B_\delta(X,r)\subset H,$$

أي أنّ X من الداخلية $\overset{\circ}{H}_\delta$.

4) نستشفّ من السؤال (3) أنّ δ أدقّ من d_2 .

5) لدينا:

$$X\in\overline{H_\delta}\ \ \Leftrightarrow\ \ \forall r>0,\ \ B_\delta(X,r)\cap H\neq\phi.$$

ولكن

$$B_\delta(X,r)\subset B_d(X,r),$$

إذن:

$$\forall r>0,\ \ B_d(X,r)\cap H\neq\phi.$$

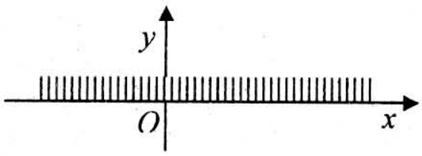
ومنه، X يلاصق H_d ، وبالتالي:

$$\overline{H_\delta} \subseteq \overline{H_d}.$$

6) أ. لدينا على التوّ:

$$\overline{F_d} = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}.$$

إنّه نصف المستوي العلويّ.



لنحسب $\overline{F_\delta}$. لدينا:

$$\overline{F_\delta} = \{X \in \mathbb{R}^2 / \delta(X,F) = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^2 / \inf_{Y \in F} \delta(X,Y) = 0\}.$$

نميّز حالتين:

- $X = O$

$$\delta(O,F) = \inf_{Y \in F} \delta(O,Y) = \inf_{Y \in F} d_2(O,Y) = 0.$$

ومنه، O ينتمي إلى $\overline{F_\delta}$.

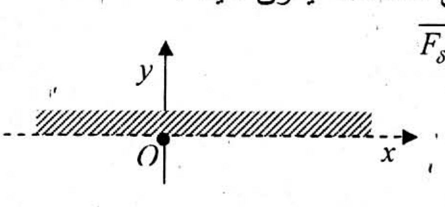
- $X \neq O$ مع $x_1 \neq 0$:

يأتي عندئذ:

$$\delta(X,F) = \inf_{Y \in F} \delta(X,Y) = \inf_{Y \in F} \left(d_2(O,X) + d_2(O,Y)\right)$$
$$= d_2(O,X) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} > 0.$$

ومنه، X لا ينتمي إلى $\overline{F_\delta}$. في الخلاصة يكون لدينا :

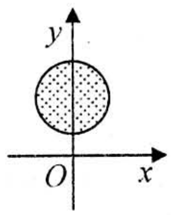
$$\overline{F_\delta} = F \cup \{O\}.$$



ب. لدينا:

$$G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/(x-0)^2+(y-1)^2<\frac{1}{4}\right\}.$$

من البائن أنّ G يمثّل القرص المفتوح $B_{d}\left((0,1),\frac{1}{2}\right)$ ذا المركز $(0,1)$ ونصف القطر $\frac{1}{2}$. وعليه، يأتي توّا:



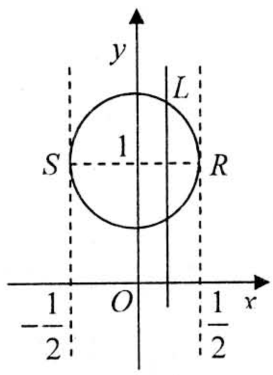
$$\overline{G_d}=B_d^f\left((0,1),\frac{1}{2}\right),$$

وهي الكرة المغلقة المتمركزة عند $(0,1)$ وذات نصف القطر $\frac{1}{2}$.

لنبحث عن $\overline{G_\delta}$. لدينا بطبيعة الحال:

$$\overline{G_\delta}\subseteq\overline{G_d}=B_d^f\left((0,1),\frac{1}{2}\right).$$

لتكن L نقطة من $\overline{G_\delta}\setminus G$. ($L$ نقطة من الدائرة $\mathscr{C}\left((0,1),\frac{1}{2}\right)$ إذن !).



نرمز بـــ R و S لنقطتي التقاء الدائرة المذكورة بالمماسين النازلين من النقطتين $\left(\frac{1}{2},0\right)$ و $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ونرمز بـــ D_L للمستقيم المارّ من L والموازي لمحور العينات Oy. نفترض أنّ L تختلف عن R و S. يأتي عندئذ أنّ التقاطع $D_L\cap G$ غير خال. وعليه:

$$\delta(L,G)=\inf_{X\in G}\delta(L,X)\leq\inf_{X\in D_L\cap G}\delta(L,X)=\inf_{X\in D_L\cap G}d_2(L,X)=0,$$

ذلك لأنّ L عنصر من $\overline{G_d}$. نستخلص أنّ $\delta(L,G)=0$. ومنه، L عنصر من $\overline{G_\delta}$. لنفترض الآن أنّ $R=L$ (أو $S=L$). نكتب عند ذلك:

$$\delta(R,G)=\inf_{X\in G}\delta(R,X)=\inf_{X\in G}\left(d_2(R,O)+d_2(O,X)\right)$$

$$=\inf_{X\in G}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}+d(O,X\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\neq 0.$$

وعليه، فالمجموعة $\{R,S\}$ غير محتواة في $\overline{G_\delta}$. . ومنه:

$$\overline{G_\delta}=\overline{G_d}\setminus\{R,S\}.$$

وبه ينتهي التمرين.

11.1 مسائل للبحث

1) 1) أيّ من التطبيقات الآتية يعرّف مسافة على $\mathbb{R}$:

$$(x,y)\mapsto d_1(x,y)=|shx+shy|,$$
$$(x,y)\mapsto d_2(x,y)=|shx-shy|,$$
$$(x,y)\mapsto d_3(x,y)=|shx|+|shy|,$$
$$(x,y)\mapsto d_4(x,y)=|x^3-y^3|,$$
$$(x,y)\mapsto d_5(x,y)=|Arctg\, x-Arctg\, y|?$$

2) عيّن كرة الوحدة المغلقة الملحقة بكلّ مسافة ثمّ مثّلها هندسيّا في معلم متعامد متجانس.

2) لتكن E مجموعة المتتاليات الحقيقيّة. اثبت أنّ التطبيق d:

$$(x,y)\mapsto d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\inf\left(\left|x_k-y_k\right|,1\right),$$

حيث $x=(x_k)_k$ و $y=(y_k)_k$ عنصران من E، مسافة على E.

3) ليكن (E,d) فضاء متريّا و A جزءا غير خال منه. وليكن x و y عنصرين من E. هل المتباينات الثلاث:

أ. $d(x,y)\le d(x,A)+d(y,A)$

ب. $d(x,A)\le d(x,y)+d(y,A)$

ج. $d(y,A)\le d(x,y)+d(x,A)$

محقّقة دوما ؟ اعط أمثلة مضادّة في حالة النفي.

4) ليكن A و B جزأين من فضاء متريّ (E,d) مسافته محدودة. نضع:

$$\delta(A,B)=\sup_{x\in A} d(x,B).$$

1) ما هو الشرط الذي من أجله يكون $\delta(A,B)$ معدوما ؟

2) اثبت أنّ δ يحقّق المتباينة المثلّثيّة.

3) نضع:

$$\delta(A,B)=\max\left(\delta(A,B),\delta(B,A)\right).$$

اثبت أنّ δ مسافة على جماعة الأجزاء المغلقة غير الخالية من E.

5) ليكن $\delta:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ التطبيق المعرّف بـــ :

$$\delta(x,y)=\begin{cases} d_2(x,y) & ; \quad d_2(O,y)=d_2(O,x) \\ d_2(O,y)+d(O,x) & ; \quad d_2(O,y)\neq d_2(O,x) \end{cases}$$

حيث يرمز d_2 للمسافة الإقليديّة و O هي النقطة $(0,0)$.

1) اثبت أنّ $(\mathbb{R}^2,\delta)$ فضاء متريّ.

2) ارسم الكرة $B(a,r)$.

(ميزّ الحالتين $a=O$ و $a\neq O$.)

6) لتكن E مجموعة كيفيّة و F مجموعة جميع المتتاليات غير المنتهي المنتهية $x=(x_n)_n$ من عناصر من E. من أجل كلّ عنصرين x و y من F نضع:

$$k(x,y)=\inf\left\{n\in\mathbb{N}^*,\ x_n\neq y_n\right\},$$

$$d(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{k(x,y)} & ; \quad x\neq y, \\ 0 & ; \quad x=y. \end{cases}$$

اثبت أنّ (F,d) فضاء متريّ فوقيّ.

7) استبدل المسافة δ الواردة في التمرين 5 بالتطبيق $\delta':\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ المعرّف على هذا النحو:

$$\delta(x,y)=\begin{cases} d(x,y) & ; \quad \text{على استقامة واحدة } y \text{ و } x \text{ و } O \\ d(O,x)+d(O,y) & ; \quad \text{في حالة العكس} \end{cases}$$

جب على نفس السؤالين المطروحين في التمرين المذكور.